Cours 15

Remarque : régularité du flot

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad C^1$$

$$x' = F(x)$$

Alors $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1.

Dans la preuve j'ai supposer F de classe C^2. pour simplifier la démonstration.

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ y' = D_x F(x) Y \end{cases}$$

$$G(X, Y) = \begin{pmatrix} F(x) \\ D_x F(x) Y \end{pmatrix}$$ localement Lipschitz en X et Y.

Dernier cours : equilibre et stabilité

4.4. Stabilité par linéarisation

$$X' = F(x) \qquad F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

x_0 équilibre $\quad F(x_0) = 0$

Théorème : Si toutes les valeurs propres de $DF(x_0)$ sont de partie réelle strictement négative alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable.

preuve : On suppose $x_0 = 0$

- Soit $\alpha > 0$ t.q.

les valeurs propres de $DF(0)$ sont de partie réelle $< -\alpha$

de forme réelle

<u>lemme</u>: Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ t.q.

$\forall \lambda$ valeur propre de T

$$\alpha < \operatorname{Re} \lambda < \beta$$

Alors il existe une base de $\mathbb{R}^n$ t.q. le produit scalaire définit par imposant que la base soit orthonormal satisfait

$$\alpha \|x\|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \leq \beta \|x\|^2$$

preuve du lemme:

cas I: si T est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (T est semi simple)

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$$

$$\dim_{\mathbb{R}} E_i = 1 \qquad \dim_{\mathbb{R}} F_i = 2$$

$$Te_i = \lambda_i e_i \quad \langle e_i \rangle = E_i$$

$$T\big|_{F_k} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$$ dans une base (f_k, g_k)

où $a_k + ib_k$ est la valeur propre de F_k.

On définit le produit scalaire $\langle \; , \; \rangle$ t.q. $(e_1, \ldots, e_r, f_1, g_1, \ldots, f_s, g_s)$ comme base orth.

t.q. $\alpha < \langle T e_k, e_k \rangle = \lambda_k < \beta$

$$\alpha < \langle T f_k, f_k \rangle = a_k < \beta$$

$$\alpha < \langle T g_k, g_k \rangle = a_k < \beta$$

$$\Rightarrow \alpha\|x\|^2 < \langle T x, x \rangle < \beta \|x\|^2$$

(on vérifie sur F_k :
$$\left\langle \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$(a_k x_1 - \cancel{b_k x_2}) x_1 + (\cancel{b_k x_1} + a_k x_2) x_2$$
$$a_k (x_1^2 + x_2^2)$$
)

cas II cas non-semisimple

bloc de Jordan :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la base canonique de Jordan satisfait

$(e_1, \dots, e_n)$
$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boxed{T = S + N}$$

$S e_i = \lambda e_i$

$N e_n = e_{n-1}$

$\vdots$

$$N e_2 = e_1$$

Soit $\varepsilon > 0$. On définit une nouvelle base $\left(\frac{e_1}{\varepsilon^{n-1}}, \frac{e_2}{\varepsilon^{n-2}}, \dots, \frac{e_{n-1}}{\varepsilon}, e_n \right)$

Dans la nouvelle base la matrice de T

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

En effet on observe que

$$N e_n = e_{n-1} = \varepsilon \left(\frac{e_{n-1}}{\varepsilon} \right)$$

$$N \left(\frac{e_{n-1}}{\varepsilon} \right) = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \frac{e_{n-2}}{\varepsilon^2} = \varepsilon \left(\frac{e_{n-2}}{\varepsilon^2} \right)$$

Soit $\langle \, , \rangle_\varepsilon$ le produit scalaire t.q. la base $\left(\frac{e_1}{\varepsilon^{n-1}}, \dots, \frac{e_{n-1}}{\varepsilon}, e_n \right)$ est orthonormal. Alors

$$\frac{\langle Tx, x \rangle_\varepsilon}{\|x\|_\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{\langle Sx, x \rangle}{\|x\|^2}$$

Si $\alpha < \mathrm{Re}(\lambda_i) < \beta$ et ε est suffisament petit

$$\alpha < \langle Tx, x \rangle_\varepsilon < \beta$$

$$\ldots \leq \ldots \frac{\quad}{\|x\|_\varepsilon^2} \ldots \leq$$

fin de la preuve du lemme

Soit $\langle\, ,\, \rangle$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

t.q. $\boxed{\langle Df(0)x, x\rangle \leq -\alpha\|x\|^2}$

On a alors comme f est C^1 :

$$\langle f(x), x\rangle = \boxed{\langle Df(0)x, x\rangle + o(\|x\|^2)}$$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.q.

$$\langle f(x), x\rangle \leq \boxed{-\frac{\alpha}{2}\|x\|^2}$$

Soit v t.q. $\|v\| < \delta$

$$x(t) = \phi_t(v)$$

Soit t_0 t.q. $\forall t \in [0, t_0]$

$$\|\phi_t(v)\| < \delta$$

On calcule la dérivé :

$$\frac{d}{dt}\|\underbrace{\phi_t(v)}_{x(t)}\| = \frac{\langle x'(t), x(t)\rangle}{\|x(t)\|}$$

$$= \frac{\langle f(x(t)), x(t)\rangle}{\|x(t)\|}$$

$$\leq -\frac{\alpha}{2}\|x(t)\|$$

$\Rightarrow \|x(t)\|$ est décroissant

(en particulier $\|x(t)\| \leq \|v\|$)

$\Rightarrow$ $x(t)$ est définie $\forall t \geq 0$

Maintenant on a $\forall t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \leq -\frac{\alpha}{2}\|x(t)\|$$

en intégrand :

$$\|x(t)\| - \underbrace{\|x(0)\|}_{= v} \leq -\frac{\alpha}{2}\int_0^t \|x(s)\|\, ds$$

Lemme de Gronwall

$$\|x(t)\| \leq \|v\| e^{-\frac{\alpha}{2} t} \qquad t \geq 0$$

i.e. $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ ■

x_0 est équilibre asymptotiquement stable.

Exemple : $y' = -y^3$ sur $\mathbb{R}$ $(f(y) = -y^3)$

$Df(0) = 0$ $\quad (f(0) = 0)$

0 est point d'équilibre

0 est asymptotiquement stable :

solution de l'équation :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y^3} = \int_0^t -ds$$

$$\left.\frac{1}{2y^2}\right|_{x_0} = t$$

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x_0^2} = t$$

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x_0^2} + t$$

$$2x^2 = \frac{1}{\frac{1}{2x_0^2} + t}$$

$\Rightarrow$ • si $x_0 > 0$ $\quad x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2x_0^2} + t}}$

• si $x_0 < 0$ $\quad x(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2x_0^2} + t}}$

bien défini pour $t > -\dfrac{1}{2x_0^2}$

$$I_{x_0} = \left] -\frac{1}{2x_0^2}, +\infty \right[$$

$$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

On admet sans démonstration le théorème :

théorème : Si x_0 est point d'équilibre stable alors $DF(x_0)$ a ses valeurs propres de partie réelle ≤ 0

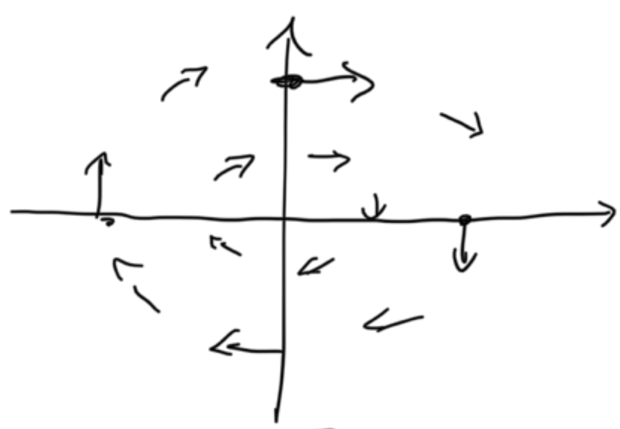
Exemple :
$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad \underline{F}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad \underline{g}$$

$$DF(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = Dg(0)$$

valeurs propres de DF sont $i, -i$

le linéarisé champ de vecteur



Soit $\boxed{\rho(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2}$

Pour F :
$$\frac{d}{dt}\rho(x_1(t), x_2(t)) = 2x_1x_1' + 2x_2x_2'$$
$$= 2x_1(\cancel{x_2} - x_1(x_1^2 + x_2^2))$$
$$+ 2x_2(\cancel{-x_1} - x_2(x_1^2 + x_2^2))$$
$$= -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2)$$
$$= -2(x_1^2 + x_2^2)^2 = -2\rho^2$$

Pour g : $\frac{d}{dt}\rho(x_1(t), x_2(t)) = 2(x_1^2 + x_2^2)^2 = 2\rho^2$

$\frac{d}{dt}((x_1^2, x_2^2)) = -(\ldots)$ [illegible]

f : e est décroissant $e \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

(lemme de Gronwall)

g : $e \longrightarrow \infty$ en en temps fini.

4.4.1 Équilibres hyperboliques

Définition : Un équilibre x_0 est dit <u>hyperbolique</u> si toutes les valeurs propres ont partie réelle non nulle.

On obtient des deux théorèmes précédent

Corollaire : Un point d'équilibre hyperbolique est asymptotiquement stable si les valeurs propres sont de partie réelle négative, (sinon le point n'est pas stable.)
(réciproque)

Théorème (Hartman - Grobman) Soit x_0 un équilibre hyperbolique.

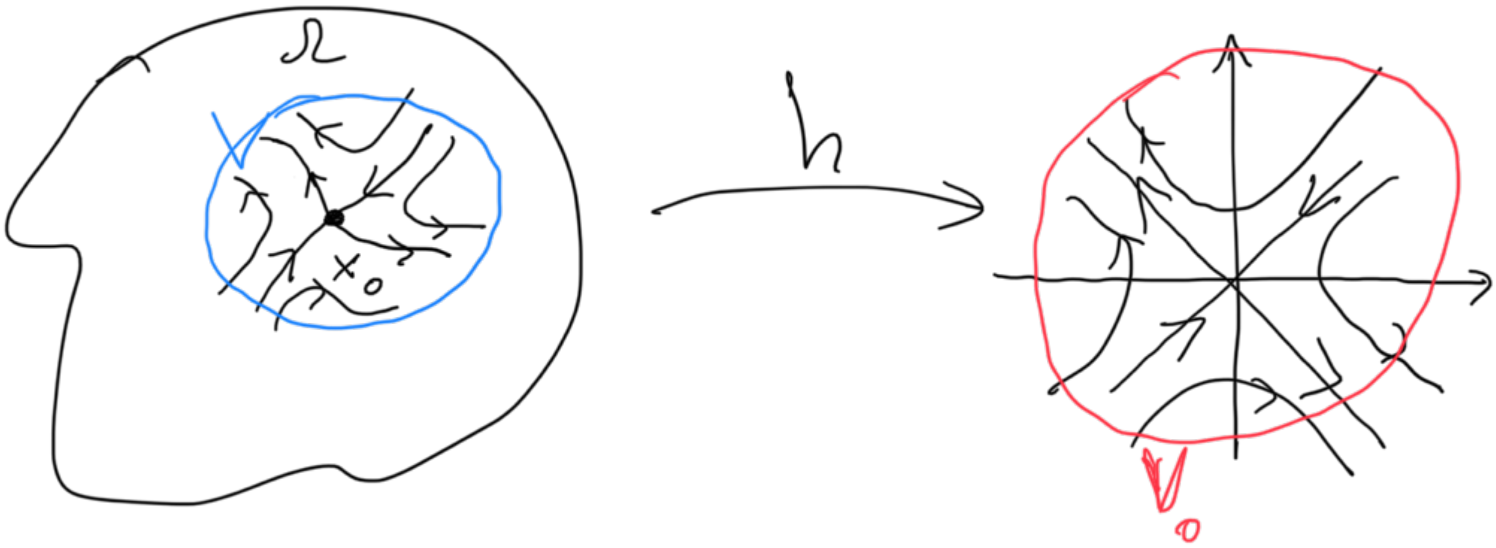
Soit $\phi_t^L(y) = e^{tDF(x_0)} y$ (flot du linéarisé en x_0)

Alors il existe un homéomorphisme ...

Alors il existe un homéomorphisme

$$h : V_{x_0} \longrightarrow V_0$$
$$\quad x_0 \in V_{x_0}, \quad 0 \in V_0$$

t.q. $\forall$ t petit pour $\phi_t^L(h(x)) = h(\phi_t(x))$



conjugaison des flots :

$$h^{-1} \circ \phi_t^L \circ h = \phi_t$$

Rappel : redressement de champ de vecteurs.

4.5 Fonction de Lyapunov

4.5.1 Champ de gradient

$V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$f(x) = -\nabla V(x)$ champ gradient (de classe C^1)

en coordonnées :

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

une définition plus intrinsèque est, produit scalaire

[*] $\underset{\text{application linéaire}}{DV(x)} \cdot v = \underline{\langle \nabla V(x), v \rangle} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

(il existe un vecteur $\nabla V(x)$ pour tout $x \in \Omega$)

Remarque : ① x_0 est point d'équilibre de F

$$\Updownarrow$$

$$\nabla V(x_0) = 0$$

(i.e. x_0 est point critique de V)

② Si $x(t)$ est solution de

$$x'(t) = -\nabla V(x(t))$$

on en déduit que

i) soit $V(x(t))$ est constant

$\nabla V(x(t)) = 0$ et $x(t) = x_0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

ii) $V(x(t))$ est strictement décroissant :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= DV(x(t)) \cdot x'(t) \\ &\underset{\text{par } *}{=} -\|\nabla V(x(t))\|^2 \end{aligned}}$$

4.5.2 Fonction de Lyapunov

Soit $x' = F(x)$ $\quad F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1

Définition : Soit x_0 un point d'équilibre et $L : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue où $x_0 \in U$ est un voisinage. On dit que L est une fonction de Lyapunov local pour l'équation $X' = F(X)$ en x_0 si

a) $L(x_0) = 0$ et $L(x) > 0 \quad \forall x \in U$, $x \neq x_0$
(x_0 est un minimum stricte de L)

b) $L(\phi_t(x))$ est décroissante $\forall x \in U$

si de plus on a la condition

c) $\forall x \neq x_0 \quad x \in U$, $L(\phi_t(x))$ est strictement décroissante on dit que L est fonction de Lyapunov stricte en x_0.

Si $U = \Omega$ on dit que L est fonction de Lyapunov globale

Remarque : si L est de classe C^1
On peut vérifier une condition plus forte :

b') $\langle \nabla L(x), F(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in U$

b') $\Rightarrow$ b)

$$\frac{d}{dt} L(\phi_t(x)) = \langle \nabla L(\phi_t(x)), \frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x) \rangle$$
$$= \nabla L(\phi_t(x)) \cdot F(\phi_t(x)) \leq 0$$

$\Rightarrow$ $L(\phi_t(x))$ est décroissant.

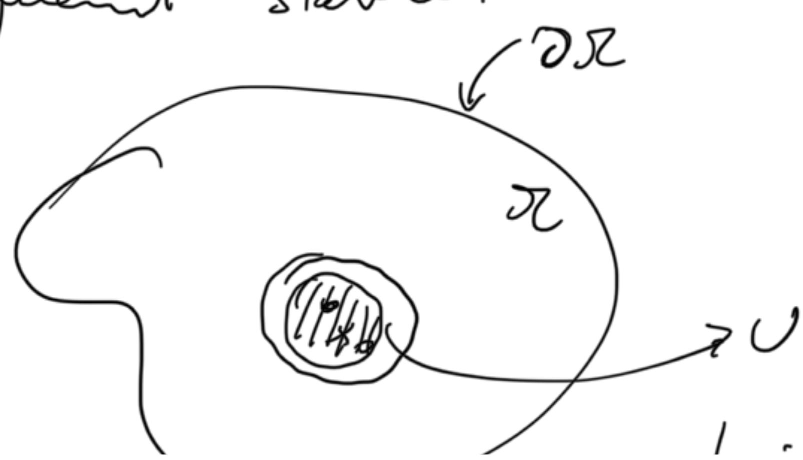
c') $\langle \nabla L(x), F(x) \rangle < 0$ $\quad \forall x \in U$, $x \neq x_0$

c') $\Rightarrow$ c).

Théorème : Supposons $x' = f(x)$ admet $L : U \longrightarrow \mathbb{R}$ comme fonction de Lyapunov local en un point d'équilibre x_0.
Alors x_0 est un $\boxed{\text{équilibre stable}}$.

- si L est stricte alors l'équilibre est asymptotiquement stable
- si L est stricte globale et L tend vers l'infini lorsque x tend vers $\partial\Omega$ alors x_0 est globalement asymptotiquement stable.

Remarque :



$L : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$L : U \to \mathbb{R}$

si $U = \Omega$ $\lim_{x \to \partial\Omega} L(x) = +\infty$.

preuve : Soit $L : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov locale. On choisit U compacte

i) $\forall \varepsilon > 0$ $U_\alpha = \{ x \in U \mid L(x) < \alpha \} \subset B(x_0, \varepsilon)$ si α est suffisement petit.

supposons $\exists x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ t.q. $L(x_n) \longrightarrow 0$ $\Big\}$ négation de i)

$x_n \in U$ compact $\Longrightarrow$ $x_n \longrightarrow \bar{x}_0 \in U$ (quitte à prendre une suite extraite)

$\Rightarrow$ $L(\bar{x}_0) > 0$ si $\bar{x}_0 \neq x_0$ (par définition de fonction de Lyapunov)

On conclut que $\bar{x}_0 = x_0$ Contradiction avec $x_n \notin B(x_0, \varepsilon)$.

Maintenant $\forall x \in U_\alpha$

$L(\phi_t(x))$ est décroissante

donc $t \geq 0 \Rightarrow \phi_t(x) \in B(x_0, \varepsilon)$

par le théorème de sortie de compacte $\phi_t(x)$ est définie $\forall t \geq 0$.

$\Rightarrow$ x_0 est point stable

- Soit L locale et stricte

$x \in U_\alpha \Rightarrow L(\phi_t(x))$ est strictement décroissante et minoré donc $\lim\limits_{t \to +\infty} L(\phi_t(x)) = \underline{l} \geq 0$

comme U est compact $\exists t_n \to +\infty$ t.q. $\phi_{t_n}(x) \longrightarrow \bar{x}_0 \in U$

donc $L(\phi_{t_n}(x)) \nearrow l$, $L(\phi_{t_n}(x)) \searrow L(\bar{x}_0)$

mais $\forall s \geq 0$ $L(\phi_s(\bar{x}_0))$

$$= \lim_{t \to +\infty} L(\phi_{s+t}(x)) = \underline{l}$$

$\Rightarrow$ $L(\phi_s(\bar{x}_0))$ n'est pas strictement décroissante contradiction

$\Rightarrow$ $\bar{x}_0 = x_0$

l'équilibre est asymptot. stable

Exercice : preuve pour L globalement Lyapunov.

Exemple : $\begin{cases} x' = 2y(\cancel{z}-1) \end{cases}$

$$\begin{cases} y' = -x(z-1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y(z-1) \\ -x(z-1) \\ -z^3 \end{pmatrix}$$

$$F(x,y,z) = 0 \iff (x,y,z) = (0,0,0)$$

point d'équilibre

linéarisation :

$$D_{(x,y,z)}F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(DF(0) - \lambda I\right) = -\lambda(\lambda^2 + 2)$$

valeurs propres $\lambda = 0$, $\lambda = \pm i\sqrt{2}$

Fonction de Lyapunov ?

On considère $L(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$

$a, b, c > 0$?

$$\frac{d}{dt} L(x(t), y(t), z(t))$$

$$= 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} + 2cz\dot{z}$$

$$= 2ax\left(2y(z-1)\right) + 2by\left(-x(z-1)\right) + 2cz(-z^3)$$

$$= \underline{4a\,xy(z-1) - 2bxy(z-1)} - 2cz^4$$

déterminer a, b, c t.q. $\frac{d}{dt} L(x,y,z) \leq 0$

On choisit

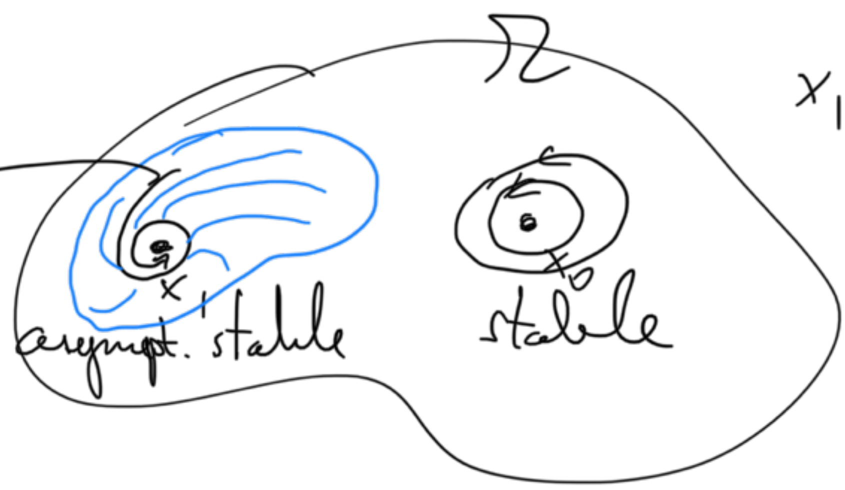
$$b = 2a \qquad c = 1$$

$$= -2z^4 \leq 0$$

$L(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$ est fonction de Lyapunov.

$\Rightarrow (0,0,0)$ est point d'équilibre stable.

Remarque



x_1 x_0 points d'équilibre stable

Définition: Soit x_0 un point d'équilibre asymptotiquement stable. On appelle <u>bassin d'attraction</u> l'ensemble

$$\{x \in \Omega \mid \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = x_0\}.$$

Remarque: • Le bassin d'attraction contient un voisinage du point d'équilibre

• Si $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de Lyapunov stricte globale alors fonction de Lyapunov stricte alors

le bassin d'attraction est Ω.

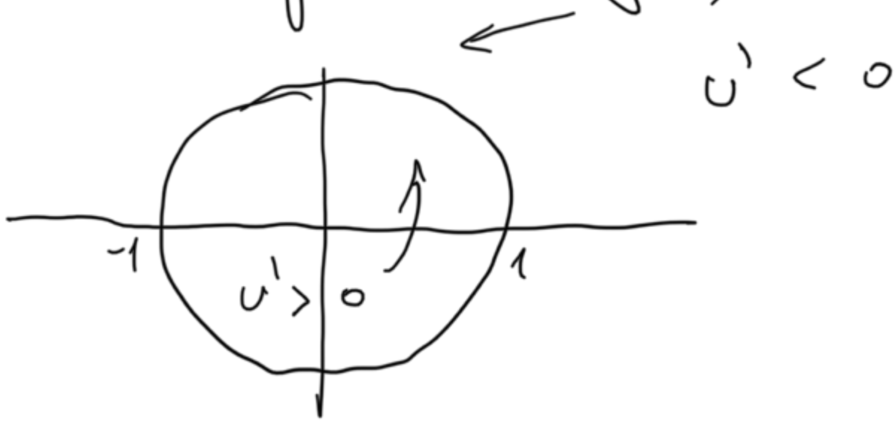
Exemple : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + y - y(x^2+y^2) \end{cases}$

Les solutions maximales sont définies sur des intervalles de la forme $]\alpha, +\infty[$ où $\alpha \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Soit $X :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ une solution maximale

On pose $u(t) = x^2(t) + y^2(t) = \|X(t)\|^2$

$$\frac{d}{dt} u(t) = 2x x' + 2y y'$$
$$= 2y(\cancel{x} + y - y(x^2+y^2)) + \cancel{2x(-y)}$$
$$= 2y^2(1 - (x^2+y^2))$$



On continue mardi prochain.