Esperance conditionnelle sachant un v.a. discrete

Y v.a. discrete à valeurs dans E

$E' = \{ y \in E \mid P(Y=y) > 0 \}$

Définition : $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \begin{cases} \mathbb{E}[X \mid Y=y] & \text{si } y \in E' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition : i) $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|Y]|] \leq \mathbb{E}[|X|]$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X|Y] \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

ii) Z v.a.r. $\sigma(Y)$-mésurable bornée

$*$ $$\boxed{\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}[Z\,\mathbb{E}[X|Y]]}$$

preuve : i)

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|Y]|] = \sum_{y \in E'} P(Y=y) |\mathbb{E}[X|Y=y]|$$

$$\leq \sum_{y \in E'} \cancel{P(Y=y)} \frac{\mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{\{Y=y\}}]}{\cancel{P(Y=y)}}$$

$$= \sum_{y \in E'} \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{\{Y=y\}}]$$

$$\leq \sum_{y \in E} \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{\{Y=y\}}] = \mathbb{E}[|X|]$$

ii) Z v.a.r $\sigma(Y)$-mésurable bornée

$\Rightarrow$ Il existe φ mésurable bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

t.q. $\quad Z = \varphi(Y)$

lemme de Doob-Dynkin

$$\mathbb{E}[Z\,\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[\psi(Y)\mathbb{E}[X|Y]]$$

$$= \sum_{y\in E} \psi(y)\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{Y=y\}}]$$

$$= \sum_{y\in E} \mathbb{E}[\psi(y) X \mathbb{1}_{\{Y=y\}}]$$

par linéarité

$$= \mathbb{E}[\psi(Y)X]$$

$$= \mathbb{E}[ZX]$$

Remarque: $\mathbb{E}[X|Y]$

si $\sigma(Y) = \sigma(Y')$ alors

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|Y'] \quad \text{p.s.}$$

preuve: $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[X|Y']$ sont $\sigma(Y)$ mesurable

$$Z = \boxed{\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}[X|Y] > \mathbb{E}[X|Y']\}}}$$ est $\sigma(Y)$-mesurable aussi

D'où :

$$\mathbb{E}[Z(\mathbb{E}[X|Y] - \mathbb{E}[X|Y'])]$$

linéarité

$$= \mathbb{E}[Z\,\mathbb{E}[X|Y]] - \mathbb{E}[Z\,\mathbb{E}[X|Y']]$$

$$= \mathbb{E}[ZX] - \mathbb{E}[ZX] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X|Y] - \mathbb{E}[X|Y'] \leq 0 \quad \text{p.s}$$

analoguement on obtient

$$\mathbb{E}[X|Y] - \mathbb{E}[X|Y'] \geq 0 \quad \text{p.s}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|Y'] \quad \text{p.s.}$$

On définit l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu.

11.2 Définition d'espérance conditionnelle.

v.a. intégrable / v.a. positive

11.2.1 Cas intégrable

Théorème et définition $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ esp. de proba.

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ sous-tribu
- $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Alors il existe une unique v.a. dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ notée

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$$

t.q. $\forall Z$ v.a. $\mathcal{B}$-mesurable bornée

$$* \quad \boxed{\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]\, Z\big]} \qquad \Downarrow \Uparrow$$

$** \quad \forall B \in \mathcal{B}$

$$\longrightarrow \boxed{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}\big[\underline{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]}\, \mathbb{1}_B\big]}$$

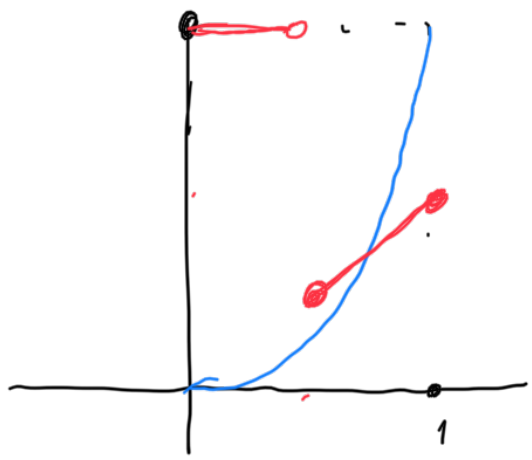
de plus si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] \geq 0$

remarque : les propriétés $*$ et $**$ sont utiles propriétés caractéristiques de l'esp. cond.

<u>Exemple</u> : $\Omega = [0,1]$ $\mathcal{A}$ Borel
P Lebesgue

$$X(x) = 2x^2$$

$$Y(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0, \tfrac{1}{2}[\\ x & x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$$\mathbb{E}[X \mid Y] := \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]$$

v.a. $\sigma(Y)$-mesurable

$$\sigma(Y) = \begin{cases} [0, \tfrac{1}{2}[\cup B \\ B \end{cases}$$ $B \subset [\tfrac{1}{2}, 1[$ $\hookrightarrow$ Borélien

$\Rightarrow$ Une fonction $\sigma(Y)$-mesurable doit être constante sur $[0, \tfrac{1}{2}[$

(car elle est une fonction de Y)

si $x \in [0, \tfrac{1}{2}[$

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)](x) = \mathbb{E}[X \mid [0, \tfrac{1}{2}[]$$

$$= \frac{1}{P([0, \tfrac{1}{2}[)} \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{X(x)}_{2x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \left. \frac{2x^3}{3} \right|_0^{1/2} = \frac{1}{6}.$$

On vérifie la propriété caractéristique :

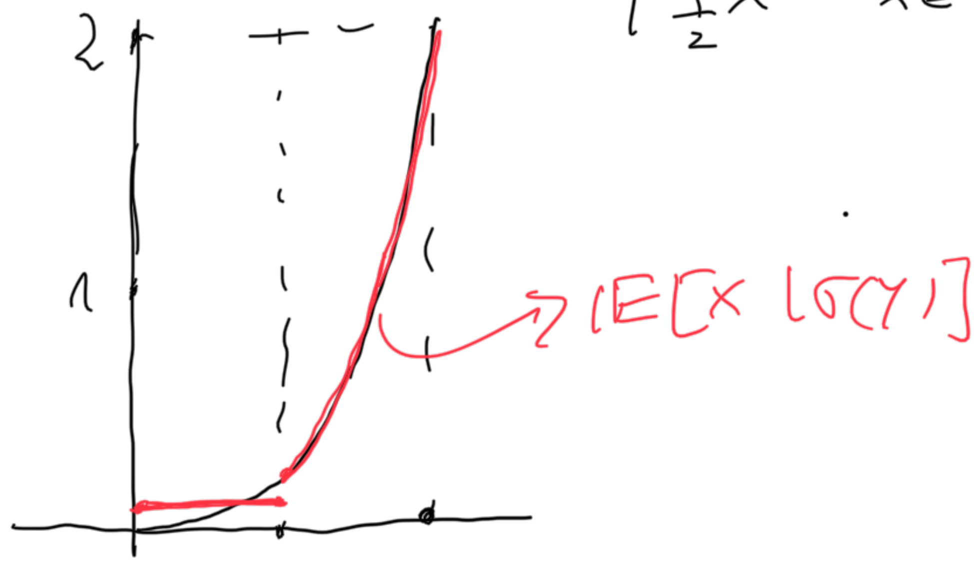
$$\int_{[0,\frac{1}{2}[} \mathbb{E}[X|Y](x)\,dx = \int_{[0,\frac{1}{2}[} X(x)\,dx.$$

Sur $[\frac{1}{2}, 1]$ on pose $\mathbb{E}[X|Y] = X$ est $\sigma(Y)$-mesurable

On vérifie la prop. caract.

$\forall B$ Borelien dans $[\frac{1}{2},1]$ $\int_B \underbrace{\mathbb{E}[X|Y](x)}\,dx = \int_B X(x)\,dx$

conclusion $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)](\cancel{x}) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in [0, \frac{1}{2}[. \\ \frac{1}{2}x^2 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$



preuve du théorème :

i) unicité : si X' et X'' v.a. $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ t.q. $\forall B \in \mathcal{B}$ $\mathbb{E}[X' 1\!\!1_B] = \mathbb{E}[X'' 1\!\!1_B]$ $(= \mathbb{E}[X 1\!\!1_B])$

On définit $B = \{X' > X''\}$

est $\mathcal{B}$-mesurable car X' et X'' le sont

on obtient $\mathbb{E}[(X'-X'')\mathbb{1}_{\{X'>X''\}}]=0$

$\Longrightarrow$ $X'\leq X''$ p.s

analoguement $X'\geq X''$ p.s

$\Longrightarrow$ $X'=X''$ p.s

ii) existence a) $X\geq 0$ b) $X\in L^1$

a) $X\geq 0$ On définit une mesure Q sur $(\Omega,\mathcal{B})$:

$$\forall B\in\mathcal{B}\quad Q(B)=\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]$$

On considère P restreinte à $\mathcal{B}$.

et on observe que

$$Q \ll P$$

Radon-Nikodym : il existe une v.a. $\tilde{X}$ $\mathcal{B}$-mesurable ≥ 0 t.q.

$$\forall B\in\mathcal{B}\quad \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]=\mathbb{E}[\tilde{X}\mathbb{1}_B]$$

$$(Q(B))$$

donc $\tilde{X}=\mathbb{E}[X\mid\mathcal{B}]$ par la définition

(on vérifie aussi que $\tilde{X}\in L^1(\Omega,\mathcal{B},P)$:
il suffit de poser $B=\Omega$ et
on obtient $\mathbb{E}[\tilde{X}]=\mathbb{E}[X]<\infty$)

par hypothèse.

b) si $X = X^+ - X^-$

on vérifie que

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] := \mathbb{E}[X^+ \mid \mathcal{B}] - \mathbb{E}[X^- \mid \mathcal{B}]$$

satisfait la propriété caractéristique.

$\boxtimes$

<u>Exemple</u> : $\Omega =]0,1]$

$\mathcal{A} = \mathcal{B}(]0,1])$

P = Lebesgue

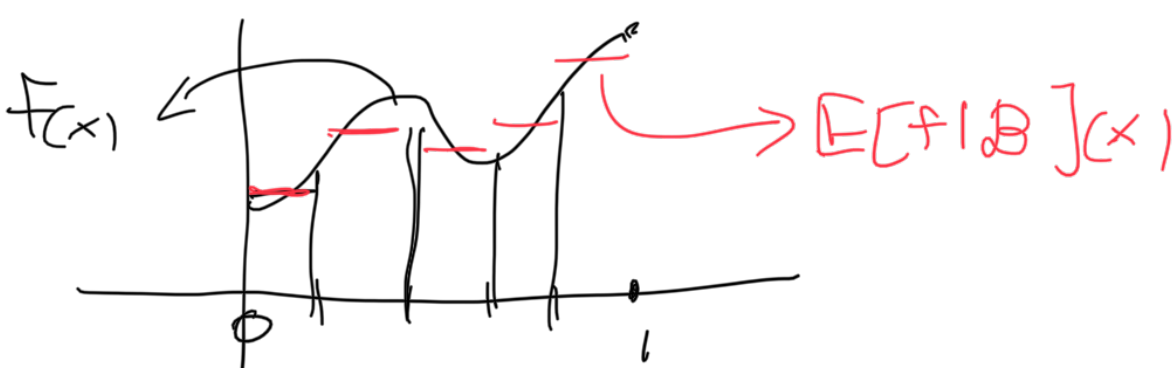
$$\mathcal{B} = \sigma\left(\left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \ 1 \leq i \leq n \right)$$

$\mathbb{E}[f \mid \mathcal{B}]$? $\left(f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P) \right)$

$\mathbb{E}[f \mid \mathcal{B}]$ est constante sur $\left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$

On vérifie :

$$\mathbb{E}[f \mid \mathcal{B}](x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(s)\,ds \quad \text{si } x \in \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$



sur $\left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ $1 \leq k \leq n$

$$\mathbb{E}\left[f\, \mathbb{1}_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right] \overset{?}{=} \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}[f\mid\mathcal{B}](x)}_{\substack{\text{constante} \\ \text{sur }]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}}\cdot \underline{\mathbb{1}_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}}\right]$$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx \quad \| $$

$$\| $$

$$\underbrace{\mathbb{E}[f\mid\mathcal{B}]}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\cancel{n}}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)\,ds \cdot \frac{1}{\cancel{n}}$$

$$\| $$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)\,ds$$

Propriétés.

a) si X est $\mathcal{B}$-mesurable

$$\mathbb{E}[X\mid\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X]$$

b) $X \longrightarrow \mathbb{E}[X\mid\mathcal{B}]$ est linéaire

c) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X,\mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X]$

d) $|\mathbb{E}[X\mid\mathcal{B}]| \leq \mathbb{E}[|X|\mid\mathcal{B}]$ p.s

e) $X \geq X' \Rightarrow \mathbb{E}[X\mid\mathcal{B}] \geq \mathbb{E}[X'\mid\mathcal{B}]$ p.s.

On passe aux équations différentielles.