Cours 9

Lemme de contraction. Soit (X, d) espace métrique complet et $F : X \to X$ une contraction :

$$d(F(x), F(y)) \leq K d(x,y) \quad 0 \leq K < 1$$

Alors il existe un unique point fixe p pour F.

De plus $\forall x \in X \quad F^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p$.

<u>preuve</u> : ① unicité si p et p' sont points fixes

$$d(\underset{\substack{\parallel \\ p}}{F(p)}, \underset{\substack{\parallel \\ p'}}{F(p')}) \leq K d(p,p')$$

impossible

② $x_0 = x$, $x_1 = F(x)$, ..., $F^{n+1}(x) = F(F^n(x))$

On montre que (x_n) est de Cauchy

$$\underline{d(x_{n+r}, x_n)} \leq K d(x_{n+r-1}, x_{n-1})$$

$$\leq K^2 d(x_{n+r-2}, x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$\leq \boxed{K^n \underline{d(x_r, x)}}$$

triangulaire

$$d(x_r, x) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{r-1}, x_r)$$

$$\leq (1 + K + K^2 + \dots + K^{r-1}) d(x, x_1) =$$

$$\frac{1-K^r}{1-K} d(x, F(x)) \leq \frac{1}{1-K} d(x, F(x))$$

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq \boxed{\frac{K^n}{1-K} d(x, F(x))}$$

$n \to \infty \quad d(x_{n+r}, x_n) \to 0$

$d(x_{n+1}, x_n) \longrightarrow 0$

Soit $p = \lim_{n\to\infty} x_n$

p est point fixe :

$$F\left(\lim x_n\right) = \lim F(x_n)$$
$$\overset{\shortparallel}{p} \qquad = \lim x_{n+1}$$
$$= p$$

Remarque : Soit $F : X \to X$ continue t.q. il existe $m \in \mathbb{N}^*$ t.q. F^m est une contraction alors p (le unique point fixe de F^m) est point fixe de F. Aussi $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = p$

preuve : On veut montrer que $p = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$.

on écrit $n = km + l$ (division euclidienne)

$$\Rightarrow \quad F^n(x) = (F^m)^k(F^l(x)) \qquad 0 \le l < m$$

$$\lim_{k\to\infty} F^n(x) = \lim_{k\to\infty} (F^m)^k(F^l(x)) = p$$

mais $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \lim_{k\to\infty} (F^m)^k(F^l(x)) = \underline{\underline{p}}$

☒

Théorème (de Cauchy-Lipschitz) Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable.

Alors $\forall (t_0, x_0) \in U \quad \exists \delta > 0 \quad$ t.q.

Alors $\forall (t_0,x_0)\in U \quad \exists \delta>0 \quad$ t.q.

le problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t,x(t))$$

$$x(t_0)=x_0$$

a une unique solution en $]t_0-\delta, t_0+\delta[$

<u>preuve</u>: Soit $K\subset U$ t.q. $(t_0,x_0)\in \mathring{K}$ ← intérieur de K

$$M = \max_K \|f(t,x)\| \geq 0$$

$L>0$ la constante de Lipschitz sur K

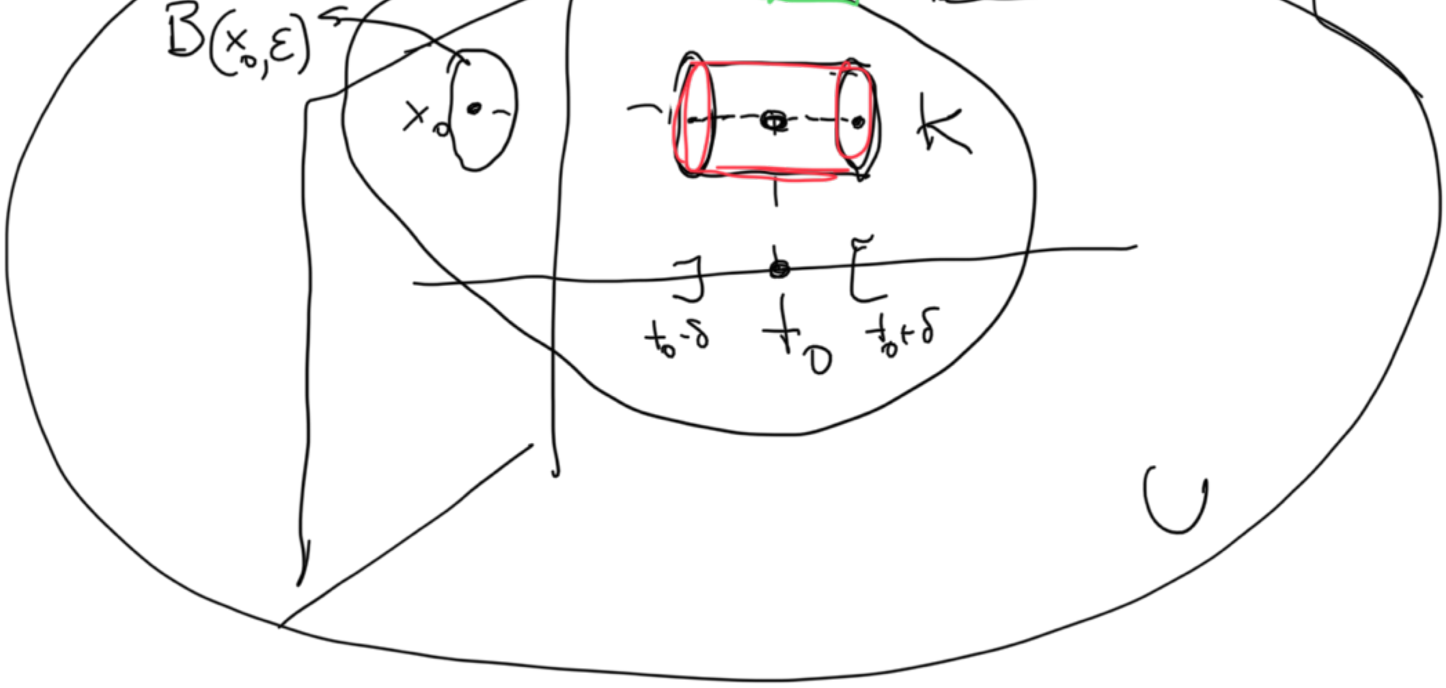
$$\left(\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \right)$$

On fixe $\delta>0$, $\varepsilon>0$ t.q.

$$\boxed{]t_0-\delta, t_0+\delta[\times \overline{B(x_0,\varepsilon)}} \subset \mathring{K}$$

et tel que

$$\delta < \min\left(\boxed{\frac{\varepsilon}{M}}, \boxed{\frac{1}{2L}} \right)$$



$x' = f(t,x)$

sur le cylindre
on a $\|F(t,x)\| \leq M$

$$\delta M < \varepsilon$$

stratégie : Définir X espace métrique complet
et appliquer le lemme
de la contraction.

- $X = C([t_0-\delta, t_0+\delta], \overline{B}(x_0, \varepsilon))$

espace de fonctions continues à valeurs dans $\overline{B}(x_0,\varepsilon)$
avec la norme $\| \ \|_\infty$.

(c'est un espace métrique complet)

- On définit une application $T : X \longrightarrow X$

$u \in X \quad (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))\, ds$

Tu est continue et à valeurs dans $\overline{B}(x_0,\varepsilon)$

car $\forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$

$$\|Tu(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|F(s,u(s))\|}\, ds \right|$$

$$\leq M \left| \int_{t_0}^{t} ds \right| \leq M.\delta \leq \varepsilon$$

- On montre que T est contractante :

$u,v \in X \quad \|Tu - Tv\|_\infty \leq L \|u-v\|_\infty$

$\underline{\|Tu(t) - Tv(t)\|}$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} (F(s,u(s)) - F(s,v(s)))\, ds \right\|$$

$$\leq \left| \int^{t} \|F(s,u(s)) - F(s,v(s))\|\, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \|u(s) - v(s)\| \, ds \right|$$

$$\leq \|u-v\|_\infty L \left| \underbrace{\int_{t_0}^{t} ds}_{\leq \delta} \right|$$

$$\leq \|u-v\|_\infty L . \delta$$

(On avait choisit $\delta < \frac{1}{2L}$)

$$\leq \|u-v\|_\infty \frac{1}{2} \Rightarrow \|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|u-v\|_\infty$$

$\Rightarrow$ T est contractante

Par le lemme de contraction on obtient l'existence d'un point fixe de T $\Rightarrow$ solution de l'équation différentielle.

<u>unicité</u> : Supposons qu'il existe une solution $u : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$ et $\boxed{u \notin X}$.

On considère le premier temps t_1 t.q.

$$u(t_1) \notin B(x_0,\varepsilon) \Rightarrow u(t_1) \in \overline{B}(x_0,\varepsilon)$$

on a $\varepsilon = \|u(t_1) - x_0\| \leq \sup_{t\in[t_0,t_1]} \|u'(t)\| |t_1 - t_0|$

$$< M\delta$$

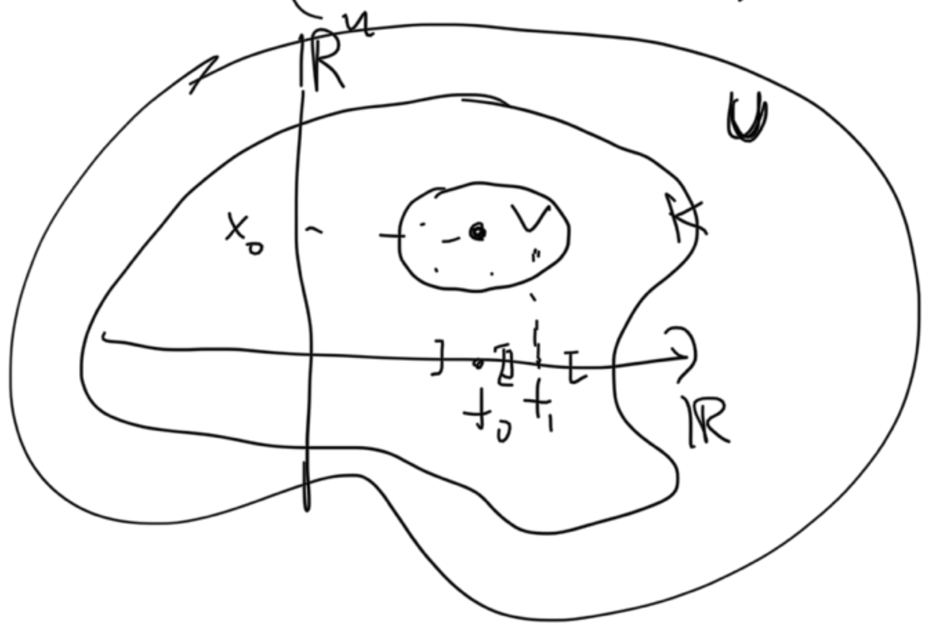
$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{M} < \delta$ contradiction. ■

Corollaire : Sous les mêmes hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz il existe un voisinage V $((t_0, x_0) \in V)$ t.q.

$\forall (t_1, x_1) \in V$ le problème de Cauchy

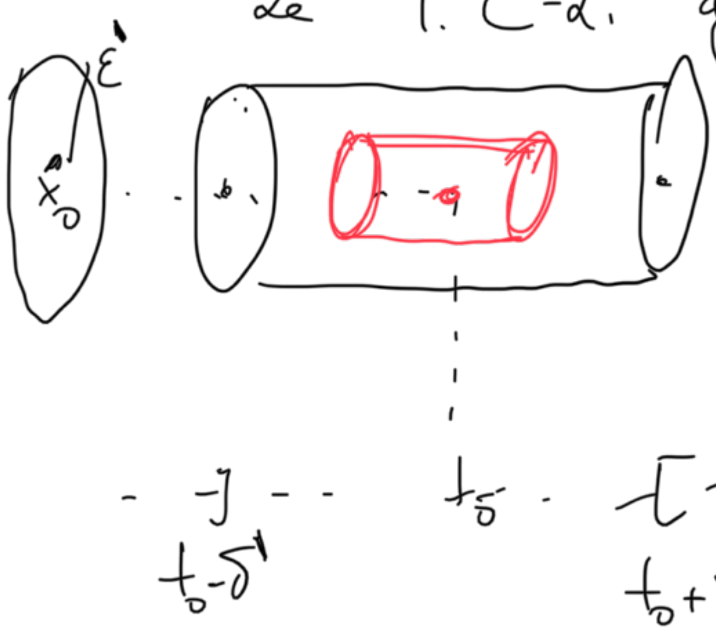
$$x'(t) = f(t, x(t))$$
$$x(t_1) = x_1$$

admet une solution sur $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ où $\delta > 0$ (uniforme sur V)



Le T. C-L. garantie l'existence d'un cylindre

preuve :



$]t_0 - \delta', t_0 + \delta'[\times \overline{B(x_0, \varepsilon')}$.

Maintenant on choisit le cylindre

$\delta = \frac{\delta'}{2}$ $\quad$ $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\times \overline{B(x_0, \varepsilon)}$

$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$

Pour chaque (t, x) dans ce cylindre

les condition des théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites et δ est uniforme.

$\blacksquare$

Corollaire (régularité des solutions)

Avec les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz si F est de classe C^k alors les solution sont de classe C^{k+1}.

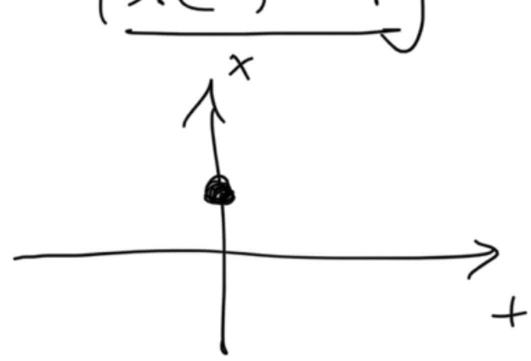
<u>preuve</u> : Si F est de classe C^1

- $u'(t) = F(t, u(t))$ est de classe C^1
  $\Rightarrow u$ est de classe C^2
- si F est de classe C^{k-1}
  $u'(t) = F(t, u(t))$ est de classe C^{k-1}
  $\Rightarrow u$ de classe C^k.

$\blacksquare$

Example : $x'(t) = \dfrac{t+2}{t^2 + (x(t))^2}$ $\boxed{x(0) = 1}$

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



$F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞

$\Rightarrow$ u de classe C^∞

D.L. $u'(0) = \dfrac{t+2}{t^2 + (x(t))^2} = \dfrac{2}{[illegible]} = 2$

$$\left.(t^2+(u(t))^2)\right|_{t=0} \quad 0+1$$

$$u''(0) = \left.\left(f(t,u(t))\right)'\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{t^2+u^2(t) - (t+2)(2t+2u(t)u'(t))}{(t^2+u^2(t))^2}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{1-8}{1} = -7$$

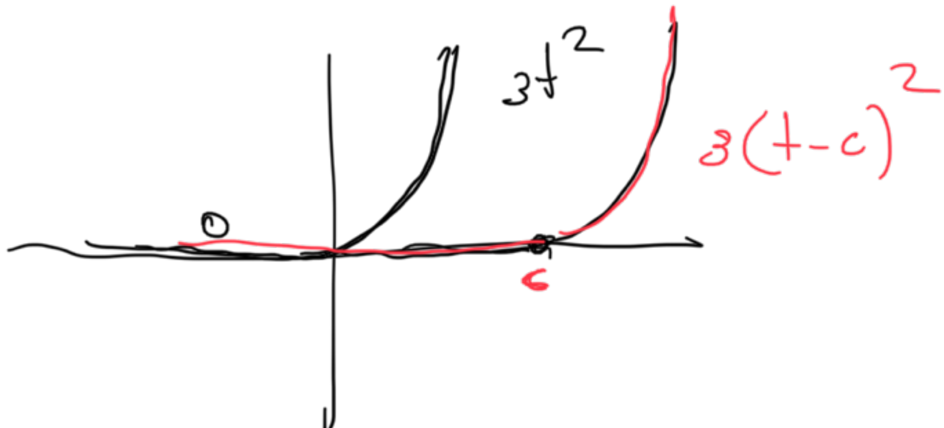
$$u(t) = 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)$$

<u>Exemple</u> : L'unicité n'est pas garantie si f n'est pas localement Lipschitz.

i) $f(t,x) = 3x^{2/3}$ n'est pas Lipschitz à l'origine :

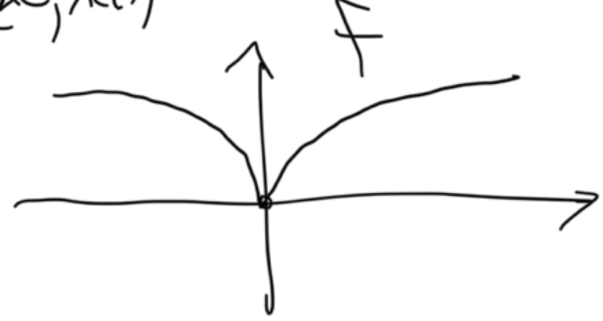
$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = x^{-1/3} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$$

solution de $x'(t) = 3x^{2/3}$



pour chacune des ces solutions $x(0)=0$

ii) $\begin{cases} x'(t) = \overbrace{\sqrt{|x(t)|}}^{f(t,\,x(t))} \\ x(0) = 0 \end{cases}$



n'est pas Lipschitz.

solution $\qquad \dfrac{x'(t)}{|x(t)|^{1/2}} = 1$

$$\boxed{\int_0^x \frac{ds}{|s|^{1/2}} = \int_0^t dt = t}$$

$$\begin{cases} x > 0 & 2x^{1/2} \\ x < 0 & \displaystyle\int_0^x \frac{ds}{(-s)^{1/2}} = -2(-s)^{1/2}\Big|_0^x = -2(-x)^{1/2} \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{ds}{|s|^{1/2}} = \frac{2x|x|^{1/2}}{|x|} = \frac{2x}{|x|^{1/2}}$$

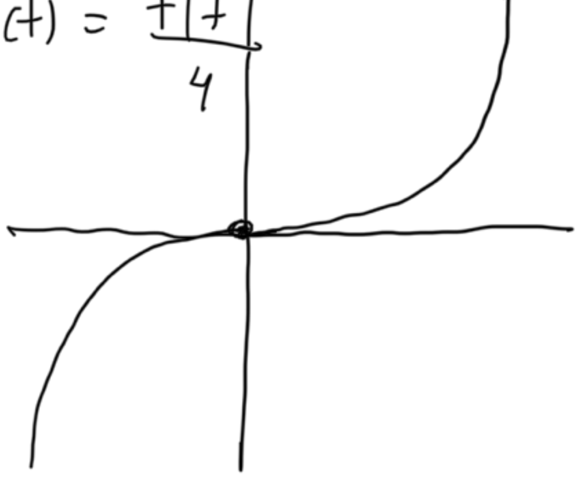
$$\frac{2x}{|x|^{1/2}} = t$$

$\Rightarrow \quad t < 0 \Rightarrow x < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{t^2}{4}$

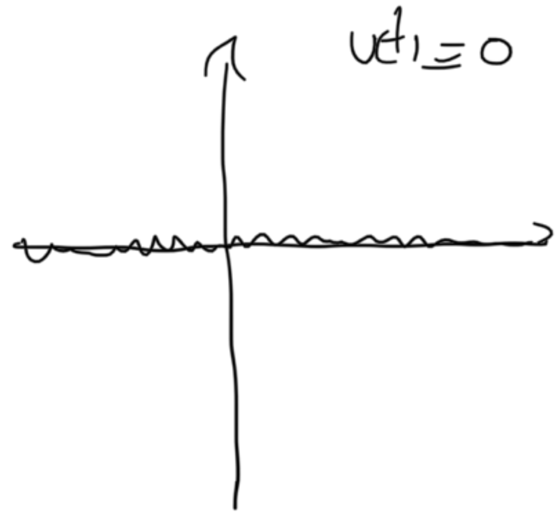
$ \quad t > 0 \Rightarrow x > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{t^2}{4}$

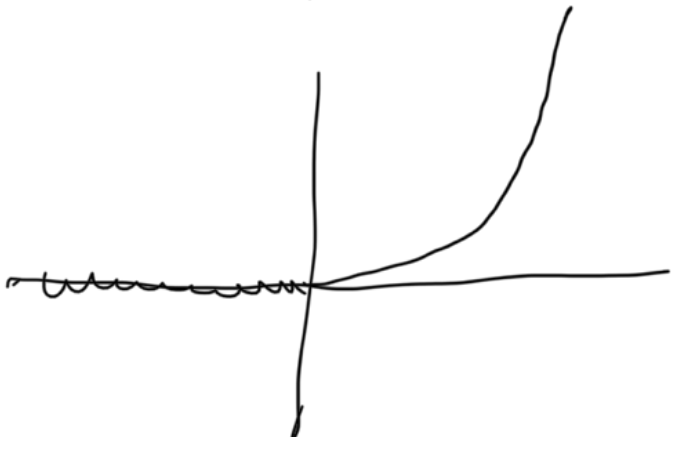
$u(t) = \dfrac{t|t|}{4}$

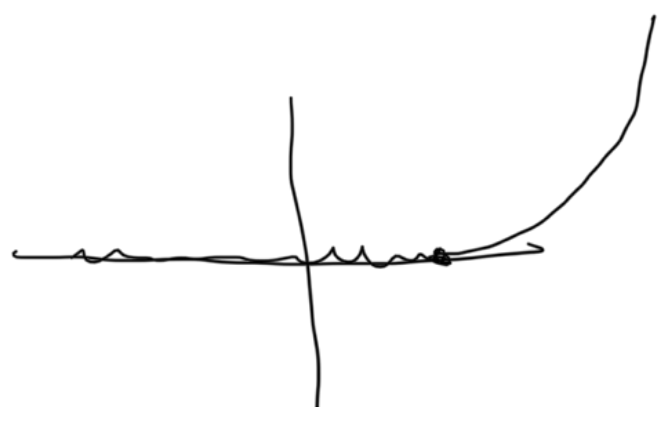
$u(t) = \dfrac{t|t|}{4}$



$u(t) \equiv 0$







...

Remarque : T. C.-L. $\delta < \min\left(\boxed{\frac{\varepsilon}{M}}, \frac{1}{2L}\right)$

utilisé pour montrer que T est contractante.

On peut se débarasser de l'estimation $\frac{1}{2L}$ dans le théorème de Cauchy-Lipschitz :

On veut montrer que

$$\exists N \text{ t.q. } \|T^N u - T^N v\|_\infty \leq K \|u - v\|_\infty$$

avec $0 \leq K < 1$.

On calcule :

$$\|Tu(t) - Tv(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, u(s)) - f(s, v(s))\right) ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right|$$

$$\leq L \|u - v\|_\infty |t - t_0|$$

$$\|T^2 u(t) - T^2 v(t)\| = \|(T(Tu) - T(Tv))(t)\|$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, Tu(s)) - f(s, Tv(s))\right) ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, Tu(s)) - f(s, Tv(s))\| ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \|Tu - Tv\|_\infty |s - t_0| \, ds \right|$$

$$\leq \|u-v\|_\infty L^2 \left| \int_{t_0}^{t} |s-t_0| \, ds \right|$$

$$L^2 \|u-v\|_\infty \frac{|t-t_0|^2}{2}$$

...

$$\|T^n u(t) - T^n v(t)\| \leq \frac{L^n}{n!} |t-t_0|^n \|u-v\|_\infty$$

$$\|T^n u - T^n v\|_\infty \leq \frac{L^n}{n!} \delta^n \|u-v\|_\infty$$

mais $\frac{L^n}{n!}\delta^n \longrightarrow 0$

$\exists N$ t.q. $\frac{L^N}{N!}\delta^N < \frac{1}{2}$

donc T^N est contractante ∎

Equations différentielles d'ordre n

$$y^{(n)}(t) = \varphi(t, \underbrace{y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)}_{n \text{ variables}}) \qquad *$$

$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

est localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable

Proposition On peut écrire l'équation $*$

comme une équation du premier ordre

$x'(t) = F(t, x(t))$

où $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$$f(t, x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, \underbrace{\varphi(t, x_1, \dots x_n)}).$$

est Lipschitzienne.

On obtient

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = \varphi(t, x_1, \dots x_n) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x_1'' = x_3 \\ &\vdots \\ &x_1^{(n-1)} = x_n \end{aligned}$$

Cauchy-Lipschitz $\Longrightarrow$

$\forall (t_0, y_0) \in U$ avec $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0n})$

le problème de Cauchy

$$y^{(n)}(t) = \varphi(t, y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

avec condition initiale :

$$y(t_0) = y_{01}$$

$$y'(t_0) = y_{02}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n}$$

admet une unique solution dans un intervalle

$$]t_0 - \delta, t_0 + \delta[.$$

Un théorème d'existence plus générale :

Théorème de Peano : Soit F continue en

$$\boxed{V = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \varepsilon)}} \text{ avec } \|F(t,x)\| < M \quad \forall (t,x) \in V$$

Alors le problème de Cauchy a une solution sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ si $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$

Remarque : il n'y a pas d'unicité en générale.

On utilisera le théorème :

(Arzela-Ascoli) Soit (X, d) espace métrique compact. Soit F famille de fonctions $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ equicontinue et bornée

(i.e. • $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \underbrace{\text{ t.q. }}_{\forall \varphi \in F} \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$)

• $\|\varphi\|_\infty < M \quad \forall \varphi \in F$

Alors toute suite (φ_n) de la famille admet une sous-suite uniformement convergente.

Exemple : Un ensemble de fonctions L-Lipschitziennes bornée par une constante.

preuve de Peano :

stratégie : utiliser C.-L sur une suite

de fonctions $F_n \longrightarrow F$ → continue.

t.q. F_n est lisse.

v_n : solutions de $x_n' = F_n(t, x_n(t))$

et on montre que $v_n \longrightarrow v$ → solution de Peano.

- Il existe une suite de fonctions lisses qui converge uniformement vers F sur V.

(admis) $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F$ uniformement

par exemple par convolution :

- F_n satisfait les hypothèses du T.C-L. avec une borne $\|F_n\| \leq M$

$\Rightarrow$ il existe des solutions $v_n : [t_0-\delta, t_0+\delta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

- (v_n) est equicontinue et uniformement bornée.

$$\to \| v_n(t) - v_n(t') \| = \left\| \int_t^{t'} F_n(s, v_n(s))\, ds \right\|$$
$$\leq M |t-t'|$$

$$\to \quad \| v_n(t) - x_0 \| \leq \varepsilon$$

Arzela-Ascoli $\Rightarrow$ il existe une sous-suite uniformement convergente $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$

- On montre que $v(t)$ est solution

du problème de Cauchy :

$$u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(s, u_n(s))\,ds$$

On observe que $f_n(s, u_n(s)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{uniformément}} f(s, u(s))$

$$\| f_n(s, u_n(s)) - f(s, u(s)) \|_\infty \nearrow 0$$

$$\leq \| f_n(s, u_n(s)) - f(s, u_n(s)) \|_\infty$$

$$+ \| f(s, u_n(s)) - f(s, u(s)) \|_\infty$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f_n(s, u_n(s))\,ds$$

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$

$\Rightarrow$ u est solution du problème de Cauchy.

1.2 Solution maximale et durée de vie.

On suppose $x'(t) = f(t, x(t))$ eq. diff.

avec f loc. Lip. deuxième variable.

1.2.1. Solution maximale

<u>Définition</u> : On dit qu'une solution du problème de Cauchy est une solution maximale (ou non-prolongeable) si elle n'a pas de

prolongement à un intervalle plus grand.

Proposition : Soit $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions sur I_1, I_2 deux intervalles ouverts t.q. en $t_0 \in I_1 \cap I_2$ $u_1(t_0) = u_2(t_0)$

Alors 1) $\underline{u_1 = u_2 \text{ sur } I_1 \cap I_2}$

2) le recollement de u_1 et u_2 est une solution.

rappel : le recollement de u_1 et u_2 sur $I_1 \cup I_2$ est la fonction

$$I_1 \cup I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \begin{cases} u_1(t) & t \in I_1 \\ u_2(t) & t \in I_2 \end{cases}$$

preuve : 1) $I_1 \cap I_2$ est convexe (intersection de deux intervalles)

$\Longleftrightarrow$ un ensemble non-vide ouvert et fermé de $I_1 \cap I_2$ coïncide avec $I_1 \cap I_2$

Soit $A = \{ t \in I_1 \cap I_2 \mid u_1(t) = u_2(t) \}$

- $t_0 \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow A \neq \emptyset$
- Fermé
- ouvert (par le théorème de Cauchy-Lipschitz)

(i.e. si $u_1(s_0) = u_2(s_0) \Rightarrow \exists \delta$

t.q. $v_1 = v_2$ sur $]s_0-\delta, s_0+\delta[$)

$\Longrightarrow A = I_1 \cap I_2$

2) La fonction $v(t) = \begin{cases} v_1(t) & t \in I_1 \\ v_2(t) & t \in I_2 \end{cases}$

est bien définie par 1) est une solution.

$\blacksquare$

Théorème : $\forall (t_0, x_0) \in U$ il existe une unique solution maximale $v :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant $v(t_0) = x_0$. Toute solution du problème de Cauchy est une restriction de v à un intervalle $I \subset]t_-, t_+[$.