# Feuille TD 3 - Équations différentielles linéaires

## 1. Équations linéaires non autonomes

**Exercice 1.** On considère l'équation différentielle définie

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0, \tag{1}$$

avec $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

1. Écrire l'équation (1) comme un système $x'(t) = A(t)x(t)$ d'ordre 1 en dimension 2.
2. Demontrer que toute solution non identiquement nulle de (1) s'annule au plus un nombre fini de fois dans chaque intérvalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
3. Demontrer que si $u_1, u_2$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (1) alors elles ne peuvent pas s'annuler dans un même point.
4. Demontrer que les points d'annulations de $u_1$ et $u_2$ s'alternent, c'est-à-dire $u_1$ s'annule exactement une fois entre deux zeros consécutifs de $u_2$, et viceversa.

**Exercice 2.** On considère l'équation différentielle définie

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = g(t), \tag{2}$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. Écrire l'équation (2) comme un système $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ d'ordre 1 en dimension 2.
2. Remarquer que $A(t)$ est indépendante du temps. Calculer la matrice fondamentale $R(t, s)$.
3. Utiliser la formule générale
$$x(t) = R(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds$$
pour écrire la solution générale de (2), où $g$ reste inconnue.
4. Expliciter dans le cas $g(t) = e^t$. Comparer avec la méthode du TD1.

## 2. Systèmes linéaires à deux dimensions

**Exercice 3.** Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x_1' = a_1 x_1, \\ x_2' = a_2 x_2, \end{cases} \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

1. Trouver explicitement toutes les solution de (3). En dÈduire que pour tout $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de (3) telle que $x(0) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
2. Tracer l'allure des solutions dans le plan $(x_1, x_2)$.
3. On s'intéresse maintenant aux solutions de $y' = Ay$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan.

**Exercice 4.** Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, admettant $\lambda = a + ib$ pour valeur propre avec $a, b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$. On appelle $u = x + iy \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, avec $x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2$.

1. Trouver toutes les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$, et montrer que $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Montrer que $y \neq 0$, que $x \neq 0$ et que la famille $(x, y)$ est libre.
2. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, avec
$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{4}$$
3. Calculer $e^{tB}$. [Indication : Écrire $B = aI + bJ$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]. En déduire une formule pour $e^{tA}$.
4. Montrer que les trajectoires solutions de $x' = Ax$ sont des spirales logarithmiques (de la forme $\rho = C \exp(\alpha\theta)$ en coordonnées polaires $(\rho, \theta)$ dans une base) ou des ellipses, et tracer leur allure dans le plan.

5. Montrer que, en identifiant $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ avec $(x_1, x_2) \simeq x_1 + ix_2$, l'application linéaire associée à $B$ correspond à l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \lambda z$. En déduire une autre façon de calculer $e^{tB}$.

**Exercice 5.** On s'intéresse aux solutions de $x' = Bx$ où $B \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

1. Calculer $e^{tB}$.
2. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan.
3. On s'intéresse maintenant aux solutions de $y' = Ay$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est semblable à $B$. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan.

**Exercice 6.** L'écart à l'équilibre $u(t)$ d'un chariot de masse $m$ attaché à un ressort de raideur $k > 0$ satisfait :

$$mu''(t) + \lambda u'(t) + ku(t) = 0 \tag{6}$$

où $\lambda > 0$ modélise les frottements. On posera pour simplifier $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

1. Écrire l'équation différentielle sous la forme d'une équation différentielle $x' = Ax$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Determiner, en fonction de $\alpha$ et $\omega_0$, les valeurs propres de $A$. Dans quels cas $A$ est elle diagonalisable ?
3. Calculer une forme reduite de $e^{tA}$ (c'est à dire $P^{-1}e^{tA}P$ pour une matrice de changement de base $P$), puis tracer l'allure des solutions de $x' = Ax$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ dans les cas suivants :
   (i) frottements importants, i.e., $\alpha^2 > \omega_0^2$ ; on montrera alors que toute solution de l'équation présente une asymptote pour $t \to +\infty$
   (ii) frottements faibles, i.e., $0 < \alpha^2 < \omega_0^2$ ;
   (iii) frottements nuls, i.e., $\alpha = 0$ ; on montrera que les solutions sont des ellipses dans le plan.
4. Quel est le comportement des solutions dans le cas intermédiaire $\alpha^2 = \omega_0^2$ ?

**Exercice 7.** Soit $A$ une matrice réelle $2 \times 2$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est de la forme

$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$$

2. En déduire les valeurs propres de $A$ en fonctions de $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.
3. A l'aide de l'exercice précédent, décrire le comportement des solutions de $x' = Ax$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$. Commenter la figure en pièce jointe.

### 3. Systemes linéaires en dimension supérieure

**Exercice 8.** On considère le système autonome dans $\mathbb{R}^n$

$$x' = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

1. Montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre réelle $\lambda$, alors $x(t) = e^{\lambda t}x_0$ est une solution de (7) telle que $x(0) = x_0$.
2. Montrer que si $z_0 := x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre complexe $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, la fonction réelle

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)x_0 - \sin(\beta t)y_0\right)$$

   est une solution de (7) telle que $x(0) = x_0$. [*Indication : montrer que* $x(t) = \Re z(t)$, *où* $z(t) = e^{\lambda t}z_0 \in \mathbb{C}^n$]

**Exercice 9.** On considère le système autonome dans $\mathbb{R}^n$

$$x' = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

(a) On suppose que $A$ est antisymétrique, i.e., $A^T = -A$.

1. Montrer que tout valeur propre de $A$ est imaginaire pure.
2. Montrer que toute solution $x(t)$ de (8) satisfait $\|x(t)\| = \|x(0)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) On suppose que $A$ est conjuguée a une matrice antisymétrique.

1. Montrer que toute solution $x(t)$ de (8) est bornée.
2. Que peut-on dire sur les valeur propres de $A$ ?

**Exercice 10.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système autonome

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

0. Calculer $e^{tA}$ pour $a \in \{0, 1, -4\}$.

Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$, si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. toutes les solutions tendent vers 0 quand $t \to +\infty$.
2. toutes les solutions sont bornées pour $t \geq 0$.