Contrôle LM301

20 Novembre 2008

Les calculatrices sont interdites

1 Nombres complexes

1. Quels sous-ensembles du plan sont déterminés par les équations

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1, \quad |z-1| \leq 1, \quad z^6 = 1?$$

2. Résoudre $(z+i)^3 + (2z-i)^3 = 0$.
3. Montrer que, si x n'est pas un multiple de 2π,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Calculer ensuite la valeur de la somme pour $x = 0$ (non $k = 0$). Quelle est la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$?

2 Equations differentielles

1. Trouver toutes les solutions de l'équation homogêne

$$x'' + 3x' + 2x = 0.$$

2. Résoudre l'équation

$$x'' + 3x' + 2x = sin(\omega t).$$

3. Trouver une solution particulière périodique. Quelle est son amplitude quand $\omega \to \infty$?

3 DL

1. Ecrire le développement limité des fonctions suivantes (à l'ordre n en 0) :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad arctanx.$$

2. Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

Corrigé

4 Nombres complexes

1. L'équation $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1$ est equivalente à $|z+i| = |z-i|$. C'est l'équation decrivant les points équidistants de i et $-i$. L'ensemble solution est la droite des abscisses.
   L'ensemble des points satisfisant $|z-1| \leq 1$ est un disque de rayon 1 centré en $(1,0)$.
   L'ensemble des solutions de $z^6 = 1$ est formé des 6 solutions : $e^{2ki\pi/6} = e^{ki\pi/3}$, $0 \leq k \leq 5$.
2. On écrit $(z+i)^3+(2z-i)^3 = (z^3+3z^2i-3z-i)+(8z^3-12z^2i-6z+i) = 9z^3-9iz^2-9z = 9z(z^2-iz-1) = 0$. Les solution sont alors $z=0$, $z = \frac{i\pm\sqrt{-1+4}}{2} = \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$
3. On écrit

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx} + e^{-i(n-1)x} + \cdots + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx}$$

factorisant par e^{-inx} et en utilisant la formule de la somme d'une suite géométrique, on a

$$= e^{-inx}(1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{i2nx}) = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}.$$

$$= \frac{e^{-inx}e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = \frac{-2i\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{-2i\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

La valeur en $x=0$ (non $k=0$) est

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik0} = \sum_{k=-n}^{n} 1 = (2n+1)$$

et la limite est $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} = 2n+1$ (la fonction est continue en $x=0$).

5 Equations differentielles

1. L'équation caractéristique est

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

dont les solutions sont $r = -1, -2$. La solution de l'équation différentielle est

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t},$$

avec A et B réels.

2. On trovera une solution particulière de l'équation complexe $x'' + 3x' + 2x = e^{\omega t}$ de la forme $x(t) = Pe^{i\omega t}$. On prendra ensuite la partie imaginaire. On résoud :

$$(-\omega^2 P + 3i\omega P + 2P)e^{\omega t} = e^{\omega t}.$$

On obtient

$$P = \frac{1}{2-\omega^2+3i\omega} = \frac{2-\omega^2-3i\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}.$$

La solution de l'équation est

$$Ae^{-t} + Be^{-2t} + \Im\left(\frac{2-\omega^2-3i\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}e^{\omega t}\right)$$

$$= Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{2-\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}\sin\omega t + \frac{-3\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}\cos\omega t.$$

3. La solution particulière périodique est $\frac{2-\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}\sin\omega t + \frac{-3\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}\cos\omega t$. Son amplitude est

$$\frac{\sqrt{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

qui tend vers 0 pour $\omega \to \infty$.

6 DL

1.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n o(x).$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} o(x),$$

qui peut être obtenu en substituant x dans le premier DL par $-x^2$.

$$arctan\, x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} o(x),$$

qui peut être obtenu par intégration terme à terme du DL précédent. (rappeler que $\int \frac{1}{1+x^2} = arctan\, x$).

2. On fait un DL en 0 :

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + x^3 o(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + x^2 o(x)\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{3!} + x^2 o(x)\right) = -\frac{1}{3!} + o(x)$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!} + o(x)\right) = -\frac{1}{6}.$$