LM256 **Examen - Décembre 2008**
2h, documents et calculatrices interdits. Ce corrigé est disponible sur www.math.jussieu.fr/∼dinh et www.math.jussieu.fr/∼falbel

Questions. **a)** Enoncer le théorème de Fubini d'intégration d'une fonction définie sur un rectangle $[a,b]\times[c,d]$ dans $\mathbf{R}^2$. Préciser les hypothèses sur la fonction. On ne demande pas de le démontrer.

b) Calculer le volume de la boule B de centre O et de rayon R dans $\mathbf{R}^3$. On demande ici les détails de calcul.

Réponse. Voir le polycopié.

Exercice I. Soit D le domaine dans le premier quadrant de $\mathbf{R}^2$ enfermé entre les courbes d'équations $y=x^2$ et $x=y^3$. Soit C son bord orienté dans le sens direct.

1. Déterminer l'intersection, dans le premier quadrant, des deux courbes ci-dessus.

2. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D x^2 dxdy.$$

3. Calculer l'intégrale suivante en utilisant des paramétrisations de C:

$$\int_C dx + x^3 dy.$$

4. Calculer cette intégrale en utilisant la formule de Green-Riemann.

Solution. **1.** L'intersection est déterminée par les solutions communes de $y=x^2$ et $x=y^3$. Dans le premier octant, c.-à-d. pour $x,y\geq 0$, on a deux solutions $(x,y)=(0,0)$ et $(x,y)=(1,1)$. Ce sont les points d'intersection recherchés.

2. En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\iint_D x^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^{1/3}} x^2 dy = \int_0^1 (x^{7/3}-x^4)dx = 1/10.$$

3. La courbe C est constituée par deux courbes paramétrées suivantes

$$C_1 : \quad x=t, \quad y=t^2, \quad t \text{ varie de } 0 \text{ à } 1$$

et

$$C_2 : \quad x=t^3, \quad y=t, \quad t \text{ varie de } 1 \text{ à } 0.$$

D'où

$$\int_C dx+x^3dy = \int_{C_1} dx+x^3dy+\int_{C_2} dx+x^3dy = \int_0^1 (1+2t^4)dt+\int_1^0 (3t^2+t^9)dt = 3/10.$$

4. D'après Green-Riemann, on a

$$\int_C dx + x^3 dy = \iint_D d(dx + x^3 dy) = \iint_D 3x^2 dxdy = 3/10.$$

Exercice II. Montrer que le champ des vecteurs $\overrightarrow{V}$, de composantes

$$\left(\frac{3x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{x^2y}, \frac{3y^4 + 2x^2y^2 - x^4}{xy^2}\right),$$

défini sur le quadrant de $\mathbf{R}^2$ avec $x > 0$ et $y > 0$, est gradient. Trouver explicitement une fonction f telle que $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{V}$.

Solution. Observer que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{3y^4 + 2x^2y^2 - x^4}{xy^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2}\right) = -\frac{3y^2}{x} + 2 - \frac{3x^2}{y^2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{3x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{x^2y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2}\right) = -\frac{3y^2}{x} + 2 - \frac{3x^2}{y^2}.$$

Par le théorème énoncé en cours, l'égalité entre ces deux dérivées partielles dans un domaine sans "trous" implique que le champ est gradient. Nous pouvons aussi trouver explicitement la fonction potentielle dans ce cas (et ceci montre que le champ est gradient directement) : De

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2},$$

on obtient, en intégrant par rapport à x, que $f(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + c(y)$, où $c(y)$ est une fonction de la variable y. Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2} + 2x + \frac{3y^2}{x} + c'(y) = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2}.$$

On a alors $c'(y) = 0$ et on peut choisir $c(y) = 0$. On obtient que

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{xy}.$$

Exercice III. Soit D le domaine de $\mathbf{R}^3$ limité par les surfaces d'équations $z = x^2 + y^2$ et $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$.

1. Déterminer l'intersection C de ces deux surfaces.

2. En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer le volume de D.

3. En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer

$$\iiint_D (x^2 + xy + y^2)dxdydz.$$

Notons S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S supérieure au plan $z = 1$ et S_2 la partie inférieure à ce plan. Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs de composantes $(P, Q, R) = (x, -y, 1)$.

4. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_1.
5. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_2.
6. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradsky.
7. Calculer l'aire de S_1.
8. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens trigonométrique, vue d'en haut.

Solution. **1.** La courbe C est déterminée par les solutions communes de $z = x^2 + y^2$ et $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$; soit $x^2 + y^2 = 1$ et $z = 1$. C'est donc le cercle de centre $(0, 0, 1)$ dans le plan $z = 1$.

2. Si R est le rectangle $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, en utilisant les coordonnées cylindriques et puis en appliquant le théorème de Fubini (deux fois), on obtient

$$\begin{aligned} \text{volume}(D) &= \iiint_D dxdydz = \iint_R rdrd\theta \int_{r^2}^{4-3r^2} dz \\ &= \iint_R (4r - 4r^3)drd\theta = 2\pi \int_0^1 (4r - 4r^3)dr = 2\pi. \end{aligned}$$

Rappelons qu'ici la valeur absolue du Jacobien est r.

3. De même, on a

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + xy + y^2)dxdydz &= \iint_R rdrd\theta \int_{r^2}^{4-3r^2} r^2(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)dz \\ &= \iint_R (4r^3 - 4r^5)(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)drd\theta \\ &= 2\pi/3. \end{aligned}$$

4. La 2-forme associée à $\overrightarrow{V}$ est

$$\Omega = xdy \wedge dz - ydz \wedge dx + dx \wedge dy.$$

La surface S_1 est paramétrée par $x = x$, $y = y$, $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$ pour (x, y) variant dans le disque unité Δ (l'orientation est vers le haut, et dans ce cas, vers l'extérieur de D). Le flux est donc égal à

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \Omega &= \iint_{\Delta} xdy \wedge d(4-3x^2-3y^2) - yd(4-3x^2-3y^2) \wedge dx + dx \wedge dy \\
&= \iint_{\Delta} (6x^2 - 6y^2 + 1) dx \wedge dy \\
&= \iint_{R} [r^3(6\cos^2\theta - 6\sin^2\theta) + r] drd\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

5. Pour S_2, on utilise la paramétrisation $x = x$, $y = y$, $z = x^2 + y^2$ pour (x, y) variant dans le disque unité Δ, mais il faut noter que l'orientation associée est vers le haut et dans ce cas, vers l'intérieur de D. C'est pourquoi on a un signe moins dans la deuxième intégrale ci-dessous. Le flux est égal à

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \Omega &= -\iint_{\Delta} xdy \wedge d(x^2+y^2) - yd(x^2+y^2) \wedge dx + dx \wedge dy \\
&= -\iint_{\Delta} (-x^2 + y^2 + 1) dx \wedge dy \\
&= -\iint_{R} [r^3(-\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r] drd\theta \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

6. D'après la formule d'Ostrogradsky, le flux est égal à

$$\iiint_D \operatorname{div} \overrightarrow{V} \, dxdydz = \iiint_D 0 dxdydz = 0.$$

7. Comme S_1 est le graphe de $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$ au-dessus de Δ, son aire est égale à

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy &= \iint_{\Delta} \sqrt{1 + 36(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \iint_{R} \sqrt{1 + 36r^2} \, rdrd\theta \\
&= (37\sqrt{37} - 1)\pi/54.
\end{aligned}$$

8. La courbe C est le bord du disque Δ' de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1. D'après la formule de Green-Riemann généralisée, ce travail est égal à

$$\iint_{\Delta'} d(xdy - ydy + dz) = \iint_{\Delta'} 0 = 0.$$

Exercice IV. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D \cos[(x^2+4y^2+4z^2)^{3/2}]dxdydz,$$

où D est la partie du premier octant limitée par la surface d'équation $x^2+4y^2+4z^2=4$.

Solution. On effectue le changement de variables :

$$x = 2r\sin\varphi\cos\theta, \quad x = r\sin\varphi\sin\theta, \quad x = r\cos\varphi.$$

Les points (x,y,z) dans D correspondent aux (r,θ,φ) dans $R=[0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$. La valeur absolue du Jacobien est égale à $2r^2\sin\varphi$. On a en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\iiint_D \cos[(x^2+4y^2+4z^2)^{3/2}]dxdydz &= \iiint_R \cos(8r^3)2r^2\sin\varphi drd\theta \\
&= \left[\frac{1}{12}\sin(8r^3)\right]_0^1 \\
&= \frac{\sin 8}{12}.
\end{aligned}$$

— FIN —