Corrigé Examen LM200

16 Décembre 2008

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 *Décrivez les sous-ensembles du plan complexe déterminés par les équations*

$$Im\,(ze^{i\frac{\pi}{4}}) > 0 \qquad \left|z - \frac{1}{2}\right| \leq 1, \qquad z^6 + 1 = 0.$$

Le premier ensemble est le demi-plan défini par $y > -x$. Le second est le disque de rayon 1 et centre $(1/2, 0)$. Le dernier est l'ensemble formé de six racines $e^{in\pi}$, $0 \leq i \leq 5$.

Exercice 2 *Calculer le module et l'argument de* $\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$.

Le module est $\sqrt{2}$, l'argument $(\frac{2}{3} - \frac{1}{4})\pi$.

Exercice 3 *Résoudre l'équation*

$$y'' - y' + 2y = \sin 2x.$$

l'equation caractéristique est $r^2 - r + 2 = 0$ ($r = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$) . Les solutions de l'équation homogêne associée sont $Ae^{x/2}\cos(\sqrt{7}x) + Be^{x/2}\sin(\sqrt{7}x)$. On cherche une solution particulière de la forme $a\cos(2x) + b\sin(2x)$. On trouve, en substituant dans l'équation, les coefficients $a = -b = \frac{1}{4}$.

Exercice 4 *Former le développement limité en $x = 0$, à l'ordre 3, de la fonction*

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}$$

La réponse est $x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.

Exercice 5 *On considère la fonction réelle f définie par*

$$f(x) = \sin^5 x + 3\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. *Quelle est la période de f ?*
2. *Déterminer le plus grand intervalle I contenant* 0 *sur lequel la fonction est croissante.*
3. *Déterminer l'image J de I par la fonction f.*
4. *Soit $g : J \to I$ l'application réciproque de f. Calculer la dérivée $g'(0)$.*

La période est 2π. On calcule la dérivé de de f ; $f'(x) = (3 + 5\sin(x))\cos x$. Et on observe que f est croissante quand $\cos x$ est positif. On peut prendre $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $f(I) = [f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-4, 4]$. On a $g(0) = 0$ d'où

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

Exercice 6 *Calculer l'intersection du plan tangent à la sphère* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *au point* $x = y = z = 1/\sqrt{3}$ *avec l'axe des* x.

Le plan tangent est $x + y + z = \sqrt{3}$. L'intersection avec l'axe des x est le point $(\sqrt{3}, 0, 0)$.

Exercice 7 *On considère l'ensemble défini par*

$$D = \left\{ \ (x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4} \ \right\}.$$

Calculer

$$\int \int_D \cos(x^2 + y^2) dx dy \quad .$$

En coordonnées polaires :

$$\int \int_D \cos(x^2 + y^2)\, dx dy = \int_0^{\sqrt{\pi}/2} \int_0^{2\pi} (\cos r^2)\, r\, d\theta dr.$$

Donc

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}/2} (\cos r^2)\, r\, dr = 2\pi \frac{1}{2} \sin r^2 |_0^{\sqrt{\pi}/2} = \pi \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Exercice 8 *On considère le champ de vecteurs* $\mathbf{V} = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$ *défini sur*

$$D = \{ \ (x, y) \mid 0 < x, \ 0 < y \ \}.$$

1. *Montrer que* $\mathbf{V}$ *est un champ gradient et trouver* $f : D \to \mathbb{R}$ *telle que* $gradf = \mathbf{V}$.
2. *Calculer l'intégrale curviligne* $\int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ *le long du segment* Γ *entre* $(1, 1)$ *et* $(1, 2)$.

Pour trouver f telle que $grad(f) = \mathbf{V}$ on fait $\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{1}{x}$ et on conclut que $f(x, y) = xy + lnx + c(y)$ ou $c(y)$ est une fonction de y. En substituant ce résultat dans $\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{1}{y}$, on conclut que $f(x, y) = xy + lnx + lny + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

L'intégrale curviligne pour un champ gradient ne depend pas de la courbe :

$$\int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = f((1, 2)) - f((1, 1)) = 2 + ln(2) - 1 = 1 + ln(2).$$