Examen de géométrie hyperbolique

1. **Métriques plates du tore:**

   Un *reśeau* de $\mathbb{R}^2$ est un sous-groupe $\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$ où $v, w \in \mathbb{R}^2$ ne sont pas colinéaires.

   (a) Remarquer qu'un réseau L induit une métrique plate dans le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, identifiant $\mathbb{T}^2$ avec $\mathbb{R}^2/L$. Montrer que toute métrique plate dans $\mathbb{T}^2$ est ainsi obtenue.

   (b) Soit $\rho : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{R}^2$ une representation fidèle et discrète. Montrer que l'image de ρ est un réseau de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Soit
   $$\mathcal{T}'(\mathbb{T}^2) = \{\text{métriques plates dans } \mathbb{T}^2\}/\mathrm{Diff}_0(\mathbb{T}^2)$$
   Montrer qu'on a une bijection $\mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2)$–équivariante entre $\mathcal{T}'(\mathbb{T}^2)$ et $\mathrm{FD}(\pi_1(\mathbb{T}^2), \mathbb{R}^2)/\operatorname{Isom}\mathbb{R}^2$.

2. **Espace de Teichmüller du tore:**

   L'espace de Teichmüller de $\mathbb{T}^2$ est
   $$\mathrm{Teich}(\mathbb{T}^2) = \{\text{métriques plates de } \mathbb{T}^2 \text{ de aire } 1\}/\mathrm{Diff}_0(\mathbb{T}^2)$$
   Soient α, β de générateurs de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. On considère l'application
   $$f : \mathrm{FD}(\pi_1(\mathbb{T}^2), \mathbb{R}^2)/\operatorname{Isom}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}^2$$
   définie comme suit: si $\rho \in \mathrm{FD}(\pi_1(\mathbb{T}^2), \mathbb{R}^2)$, soient $v = \rho(\alpha)$ et $w = \rho(\beta)$, à conjugaison près par un élement de $\operatorname{Isom}\mathbb{R}^2$, on peut supposer que la base $\{v, w\}$ est d'orientation positive et que $v \in \mathbb{R} \times \{0\}$. À homothétie près, on peut supposer que $v = (1, 0)$. On définit alors $f(\bar{\rho}) = w \in \mathbb{H}^2$.

   (a) On identifie $\mathcal{T}'(\mathbb{T}^2)$ avec $\mathrm{FD}(\pi_1(\mathbb{T}^2), \mathbb{R}^2)/\operatorname{Isom}\mathbb{R}^2$. Montrer f restreint à $\mathrm{Teich}(\mathbb{T}^2)$ est bijective.

   (b) Si $\mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ agit sur $\mathbb{H}^2$ par transformations de Möbius, montrer que $f : \mathrm{Teich}(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{H}^2$ est équivariante.

   (c) Décrire la topologie de $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2) = \mathrm{Teich}(\mathbb{T}^2)/\operatorname{Mod}(\mathbb{T}^2)$.

3. **Lemme du collier:**

   Soit $l > 0$. Dans le modèle du demi plan supérieur $\mathbb{H}^2$, on considère la géodésique verticale $\tilde{\alpha}$ ($\{ \ z \mid \Re z = 0 \ \}$). Pour un segment $[z, w] \subset \tilde{\alpha}$ de longueur l on considère β_1, β_2 les géodésiques perpendiculaires à $\tilde{\alpha}$ par z et w respectivamente. Soient x_1, x_2 les extrémités respectives (dans l'axe réel) de β_1, β_2 du même côté de $\tilde{\alpha}$ et soit α_1 la géodésique déterminé par x_1 et x_2. Finalement on définit $\eta(l) = \mathrm{dist}(\tilde{\alpha}, \alpha_1)$.

   (a) Dans $\mathbb{H}^2$, calculer la distance entre la droite verticale $\tilde{\alpha}$ et une droite formant un angle θ avec la droite réelle.

   (b) Calculer η en fonction de l.

   (c) Montrer que η est décroissante et que

   $$\lim_{l \to 0} \eta(l) = +\infty, \ \lim_{l \to +\infty} \eta(l) = 0.$$

   (d) Soit $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ une surface hyperbolique complète, α une géodésique fermée simple de Σ de longueur l et $\tilde{\alpha} \subset \mathbb{H}^2$ un relevé de α à $\mathbb{H}^2$. Démontrer que l'anneau

   $$A(l) = \{z \in \mathbb{H}^2 : \mathrm{dist}(z, \tilde{\alpha}) < \eta(l)\}/\langle\gamma\rangle$$

   se plonge dans Σ, où $\gamma \in \Gamma$ est l'isométrie hyperbolique d'axe $\tilde{\alpha}$ et longueur de translation l. (Indication: Supposer d'abord que Σ est un pantalon à bord géodésique et α une courbe du bord).

4. **Triangles et commutateurs:**

   (a) On considère un triangle géodésique défini par trois points dans l'espace hyperbolique de dimension 2. Donner une condition pour l'existence du triangle en fonction des angles au sommets.

   (b) Pour chaque segment on considère l'involution hyperbolique fixant le point du millieux. On supposera les côtés du triangle énumérés dans le sens positif et on note les involutions r_1, r_2 et r_3. Sous quelle condition le groupe engendré par les trois rotations r_1, r_2 et r_3 est discret? Dans ce cas quel est son domaine fondamental?

   (c) Montrer que l'élément $(r_1 r_2 r_3)^2$ est un commutateur (*i. e.* de la forme $[a, b]$ ou vous trouverez l'expression de a et b).

   (d) Montrer en utilisant la question précédante que tout élément elliptique dans le groupe $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ est un commutateur.

   (e) Montrer que tout élément de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ est un commutateur.