

PRODUITS D'ISOMÉTRIES D'UN ESPACE SYMÉTRIQUE DE RANG UN ET COMPACITÉ À LA MUMFORD-MAHLER

ELISHA FALBEL ET RICHARD WENTWORTH

RÉSUMÉ. Soit G le groupe d'isométries d'un espace symétrique de courbure strictement négative. On établit que l'application qui, à chaque couple d'éléments dans deux classes de conjugaisons semi-simples fixées de G , associe la classe de conjugaison de leur produit (dans l'espace des classes de conjugaison de G) est propre modulo l'action par conjugaison. Il en découle pour $G = \mathrm{PU}(2, 1)$ que toute classe de conjugaison loxodromique peut être réalisée comme un produit d'isométries dans des classes loxodromiques spécifiées. On considère aussi l'espace de plongements discrets convexe-compacts dans G des groupes fondamentaux de surfaces fermées orientées. Lorsque la distance minimale de translation des éléments dans l'image de ces homomorphismes est minorée par une constante positive, l'espace quotient par l'action du groupe modulaire de la surface et par l'équivalence par conjugaison de G est compact. On trouve ainsi des généralisations de certains théorèmes de Mumford et de Thurston dans les cas $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

1. LES RÉSULTATS

Le problème de la détermination des valeurs propres d'un produit de matrices unitaires a été bien étudié par diverses méthodes (voir [AW, Be, Bi1, Bi2, FMS, FW, K, Sch]). Cette même question pour des groupes de Lie compacts a récemment été abordée par des méthodes similaires dans [TW] mais, pour les groupes non-compacts, elle est restée jusqu'à maintenant sans réponse définitive (pourtant, voir [Si]). On s'intéresse aussi à la structure de l'espace des représentations des groupes fondamentaux des surfaces fermées ou pointées dans les groupes non-compacts (voir [NS, H1, H2]). Le but de cet article est de mettre en évidence certains résultats sur la non-trivialité et la compacité de ces espaces dans le cas où le groupe est de rang un.

Soit X un espace symétrique de courbure strictement négative, $\mathrm{Iso}(X)$ son groupe d'isométrie, et G la composante connexe de $\mathrm{Iso}(X)$. On note $\mathcal{C} = G//G$ l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semi-simples de G . On peut considérer \mathcal{C} comme le quotient de G par l'action de conjugaison, où les orbites (non fermées) des isométries paraboliques sont identifiées avec les orbites (fermées) des semi-simples dans l'adhérence. On munit alors \mathcal{C} d'une topologie d'espace séparé. Il existe aussi une application continue $\pi : G \rightarrow \mathcal{C}$. Le résultat suivant est une conséquence de la théorie des arbres réels :

Théorème 1. *Soit c_1, c_2 deux classes de conjugaison d'éléments semi-simples de G . Alors l'application*

$$p : c_1 \times c_2 / G \rightarrow \mathcal{C}$$

définie par $p(g_1, g_2) = \pi(g_1 g_2)$ est propre. Ici, le groupe G agit sur le produit $c_1 \times c_2$ par conjugaison diagonale.

En particulier, l'image de p est fermée. L'importance de cette dernière propriété réside dans le fait que si la paire (g_1, g_2) est *irréductible* alors il existe un voisinage de $\pi(g_1 g_2)$ en \mathcal{C} contenu dans l'image de p . Il s'ensuit que l'image de p consiste en des "chambres" bornées par des "murs" qui sont eux-mêmes dans l'image des réductibles. Dans certains cas, cette observation permet de déterminer complètement l'image, comme montre l'exemple suivant :

Si c_1, \dots, c_l sont des classes de conjugaison de G , notons

$$\mathfrak{R}(c_1, \dots, c_l) = \{(g_1, \dots, g_l) : g_i \in c_i, g_1 \cdots g_l = \mathbf{I}\} / G .$$

Le groupe G agit par conjugaison diagonale, et l'espace des orbites est muni de la topologie quotient. Si c_i sont des classes des semi-simples, $\mathfrak{R}(c_1, \dots, c_l)$ est un espace séparé. Dans la Section 3.2 nous démontrons le

Corollaire 1. *Soient c_1, \dots, c_l , $l \geq 3$, des classes de conjugaison quelconques d'isométries loxodromiques dans le groupe $\mathrm{PU}(2, 1, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$; les réels, complexes ou quaternions). Alors $\mathfrak{R}(c_1, \dots, c_l)$ est non-vide. En outre, $\mathfrak{R}(c_1, c_2, c_3)$ est compact.*

Notons que :

- (1) La compacité pour $l = 3$ ne se généralise pas. Par exemple, si $l = 4$ et $G = \mathrm{PU}(2, 1)$, le corollaire implique qu'on peut fixer de façon arbitraire la classe de conjugaison loxodromique du produit $g_1 g_2 = (g_3 g_4)^{-1}$.
- (2) Le corollaire est vrai aussi pour $\mathrm{PU}(1, 1, \mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Le cas $\mathrm{PU}(1, 1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ correspond au groupe de translations d'une géodésique et évidemment le résultat n'est pas valable. Pour les groupes $\mathrm{PU}(n, 1, \mathbb{F})$, $n \geq 3$, la structure des chambres est plus compliquée, et nous ne savons pas si ce résultat s'étend.
- (3) Quand c_1, \dots, c_l ne sont pas des classes de loxodromiques, on ne peut plus s'attendre à un résultat d'existence aussi fort que celui du corollaire, et le problème ressemble plutôt à celui des matrices unitaires. Afin d'illustrer ce point, dans la Section 3 nous allons obtenir les restrictions sur les solutions de $g_1 g_2 g_3 = \mathbf{I}$ pour trois classes unipotentes (qui ne figurent pourtant pas dans le problème tel que nous l'avons posé). Pour l'étude du produit de deux classes d'éléments elliptiques, voir [P] où la structure de chambres pour l'image de l'application p est mise en évidence.

- (4) Pour les espaces symétriques de rang ≥ 2 , le théorème n'est plus valable. Dans la Section 2.2 nous fournissons un contre-exemple qui montre la limite de notre raisonnement lorsqu'il existe des plats de dimension supérieure.

Étant donné une présentation fixée, une solution de l'équation $g_1 \cdots g_l = \mathbf{I}$ est équivalente à une représentation du groupe fondamental de la sphère S^2 moins l points. On appelle alors $\mathfrak{R}(c_1, \dots, c_l)$ l'espace de modules des représentations de $\pi_1(S^2 \setminus \{p_1, \dots, p_l\})$ associé aux classes c_i . Comme il n'y a pas de restriction sur les classes de conjugaison pour $\mathrm{PU}(2, 1, \mathbb{F})$, on en déduit une définition de coordonnées locales de type Fenchel-Nielsen sur la variété des représentations dans $\mathrm{PU}(2, 1, \mathbb{F})$ du groupe fondamental d'une surface de Riemann (voir aussi [PP] et [W]).

Soit S une surface fermée orientée et $\Gamma = \pi_1(S)$ son groupe fondamental. On note $\mathfrak{C}(S; G)$ l'espace des classes d'équivalence de plongements discrets de Γ dans G qui sont convexe-cocompacts. Soit

$$\mathfrak{C}_\varepsilon(S; G) = \{\rho \in \mathfrak{C}(S; G) : |\rho(\gamma)|_X \geq \varepsilon \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\} / G ,$$

où $|g|_X$ note la translation minimale de $g \in G$:

$$(1) \quad |g|_X = \inf_{x \in X} d_X(x, gx) ,$$

et G agit par conjugaison. Notons $\mathfrak{C}(S; G) = \cup_{\varepsilon > 0} \mathfrak{C}_\varepsilon(S; G)$ (voir [GW, Lemma 2.1]). Rappelons que le groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S) = \pi_0(\mathrm{Diff}^+(S))$ des composantes du groupe des difféomorphismes conservant l'orientation de S est identifié, d'après le théorème de Dehn-Nielsen, avec le groupe d'automorphismes extérieurs de Γ . Comme tel, $\mathrm{Mod}(S)$ agit par composition sur $\mathfrak{C}(S; G)$ et $\mathfrak{C}_\varepsilon(S; G)$, et cette action est propre (voir [GW, Corollary B]). On note les espaces quotients $\mathfrak{M}(S; G) = \mathfrak{C}(S; G)/\mathrm{Mod}(S)$ et $\mathfrak{M}_\varepsilon(S; G) = \mathfrak{C}_\varepsilon(S; G)/\mathrm{Mod}(S)$.

L'exemple classique est l'espace de modules de Riemann $\mathcal{M}(S)$, réalisé comme un quotient $\mathcal{T}(S)/\mathrm{Mod}(S)$, où $\mathcal{T}(S)$ est l'espace de Teichmüller de S , et l'action de $\mathrm{Mod}(S)$ sur $\mathcal{T}(S)$ est propre (voir [Ab]). Par le théorème d'uniformisation, on identifie $\mathcal{M}(S)$ et $\mathcal{T}(S)$ avec des composantes de $\mathfrak{M}(S, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ et $\mathfrak{C}(S, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$. Un autre résultat classique est le théorème de Mumford-Mahler qui affirme que le sous-espace de $\mathcal{M}(S)$ qui consiste en des surfaces hyperboliques dont la géodésique la plus courte a une longueur au moins $\varepsilon > 0$, est compact (voir [Mu, Bers]). Dans la Section 4 on démontrera que ce théorème se généralise.

Théorème 2. *Soit G comme ci-dessus. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{M}_\varepsilon(S; G)$ est compact.*

La démonstration du théorème de Mumford-Mahler dépend de deux faits. Le premier est que l'hypothèse sur la longueur minimale d'une géodésique fermée implique une majoration sur les longueurs des géodésiques dans un nombre fini de classes d'homotopie, à l'action de $\mathrm{Mod}(S)$ près. C'est une conséquence de la géométrie hyperbolique et le fait que l'aire d'une surface hyperbolique est déterminée par le genre. Ensuite on peut en déduire le résultat car, d'après le plongement de

Fricke, les longueurs d'un ensemble suffisamment grand de classes d'homotopie de courbes fermées de S définissent des coordonnées dans $\mathcal{T}(S)$ (voir [Ab]).

Pour les groupes G , il est montré dans la Section 4 que la démonstration du Théorème 1 donne aussi une preuve de cette deuxième partie qui s'applique également à tous les groupes de rang un (notons que Kim a trouvé un analogue du plongement de Fricke dans ce cas, voir [Kim]). En outre, pour un homomorphisme $\rho : \Gamma \rightarrow G$, on démontre que la minoration de $|\rho(\gamma)|_X$ implique la majoration nécessaire comme précédemment, mais la méthode est très différente. En effet, elle découle de la théorie des applications harmoniques tordues.

Le Théorème 2 entraîne immédiatement le corollaire suivant qui généralise un résultat de Thurston (voir [Th, Corollary 8.8.6]).

Corollaire 2. *Soit G, Γ comme ci-dessus, et soit $\Lambda \subset G$ un sous-groupe convexe-cocompact. Alors il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes en Λ isomorphes à Γ .*

Remerciements. Les auteurs expriment leur reconnaissance pour le soutien apporté à leur travail au US/France Cooperative Research Grant : NSF OISE-0232724, CNRS 14551. A celui-ci s'ajoute pour R. W. le NSF Grant DMS-0505512. Nous remercions aussi John Parker, Julien Paupert et Pierre Will pour les discussions qui sont à l'origine de cet article.

2. LE PRODUIT DES ISOMÉTRIES

2.1. Démonstration du Théorème 1. Commençons par l'exemple des arbres réels. Si g est une isométrie d'un arbre T , on note $|g|_T$ la distance minimale de translation (voir (1)). Les isométries des arbres sont toujours *semi-simples*, c'est-à-dire,

$$\min(g) = \{x \in T : d_T(x, gx) = |g|_T\} \neq \emptyset .$$

On dit que g est *elliptique* si $|g|_T = 0$, et dans ce cas il existe des points fixes. Si $|g|_T \neq 0$, g est dite *hyperbolique*, et possède un axe unique que l'on note $A_g = \min(g) \simeq \mathbb{R}$. Le résultat suivant est bien connu (voir [S, pp. 89-90]) :

Lemme 1. *Soient $g, h \in \text{Iso}(T)$ avec $\min(g) \cap \min(h) = \emptyset$. Alors l'isométrie gh est hyperbolique.*

Soit $G \subset \text{Iso}(X)$ comme dans la Section 1. Nous considérons ici des suites de paires $(g_j, h_j) \in G \times G$ où les classes de conjugaison sont fixées. Le Théorème 1 est une conséquence directe du résultat suivant.

Proposition 1. *Soient g_j, h_j des suites d'isométries semi-simples, et supposons qu'il existe $B > 0$ tel que $|g_j|_X \leq B$ et $|h_j|_X \leq B$ pour tout j . Alors une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (1) *il existe une sous-suite $\{j_k\}$ et des isométries $f_k \in G$ telles que $f_k g_{j_k} f_k^{-1}$ et $f_k h_{j_k} f_k^{-1}$ convergent dans G ; ou*

(2) les distances de translation $|g_j h_j|_X$ divergent.

Pour revenir au cas des arbres, on fera un changement d'échelle le long d'une suite. Si $\varepsilon_j \downarrow 0$, et d_j note la métrique $\varepsilon_j d$ sur X , alors puisque la courbure de (X, d) est bornée par une constante négative (disons ≤ -1), la courbure de (X, d_j) tend vers $-\infty$, et les triangles géodésiques dégénèrent. En effet, on peut montrer qu'une sous-suite d'espaces (X, d_j) convergent, au sens de Gromov-Hausdorff, vers un arbre. C'est ainsi qu'on peut compactifier l'espace des représentations d'un groupe Γ dans G par des actions de Γ sur des arbres (voir [CS, MS, M, Be1, Pl]). Le résultat précis dont nous avons besoin est le suivant :

Proposition 2 (cf. [Be2, Theorem 3.9]). *Soient Γ un groupe de type fini et $\rho_j : \Gamma \rightarrow G$ une suite de représentations non-élémentaires (= pas de points fixes à l'infini). Alors (en passant à une sous-suite) une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (1) *il existe des isométries $g_j \in G$ telles que $g_j \rho_j(\gamma) g_j^{-1}$ convergent dans G pour tout $\gamma \in \Gamma$; ou*
- (2) *il existe $\varepsilon_j \downarrow 0$ et une action non-triviale (= pas de points fixes) de Γ sur un arbre T tel que $\varepsilon_j |\rho_j(\gamma)|_X \rightarrow |\gamma|_T$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

Démonstration de la Proposition 1. Supposons d'abord que g_j et h_j sont loxodromiques avec des axes A_{g_j} et A_{h_j} ayant un point en commun dans la sphère à l'infini de X . Alors on agit d'abord par une suite de conjugaisons de (g_j, h_j) pour ramener A_{g_j} à un axe A_0 déterminé, et puis par des translations qui laissent A_0 invariant afin d'obtenir la convergence (le long d'une sous-suite) des axes A_{h_j} . Le même raisonnement s'applique pour des elliptiques.

Il suffit donc de considérer le cas où les groupes engendrés par (g_j, h_j) sont non-élémentaires pour tout j . Selon la Proposition 2, si la condition (1) n'est pas satisfaite, il existe $\varepsilon_j \downarrow 0$, un arbre T , et une action non-triviale du groupe libre $\Gamma = \langle g, h \rangle$ tel que $\varepsilon_j |g_j|_X \rightarrow |g|_T$, $\varepsilon_j |h_j|_X \rightarrow |h|_T$. Comme $|g_j|_X, |h_j|_X$ sont bornés, alors g et h sont elliptiques. Si $|g_j h_j|_X$ ne divergent pas, alors gh est elliptique aussi. Par le Lemme 1, on conclut qu'il y a un point fixe de Γ dans T , ce qui contredit le fait que l'action soit non-triviale. \square

2.2. Rang Supérieur. Il nous faut expliquer pourquoi dans le Théorème 1 il est nécessaire de supposer que la courbure de l'espace X est strictement négative. Considérons le groupe H des isométries de l'espace euclidien \mathbb{E}^n . Alors H est un produit semidirect du groupe des rotations $\mathbf{O}(n)$ avec le groupe des translations \mathbb{R}^n . Fixons $(g_0, t_0), (h_0, s_0) \in H$ dans des classes de conjugaison $[(g_0, t_0)]$ et $[(h_0, s_0)]$. On va supposer aussi que $\mathbf{I} - g_0, \mathbf{I} - h_0$, et $\mathbf{I} - g_0 h_0$ sont tous les trois inversibles.

Notons que $A_j = (g_0, t_0 + (g_0 - \mathbf{I})t_j) \in [(g_0, t_0)]$ pour n'importe quelle translation $t_j \in \mathbb{R}^n$, et également pour $B_j = (h_0, s_0 + (h_0 - \mathbf{I})s_j) \in [(h_0, s_0)]$. Le produit est

$$A_j B_j = C_j = (g_0 h_0, t_0 + (g_0 - \mathbf{I})t_j + g_0(s_0 + (h_0 - \mathbf{I})s_j)) .$$

On choisit $\|s_j\| \rightarrow \infty$. Nous allons déterminer les t_j par l'équation

$$(2) \quad (g_0 - \mathbf{I})t_j + g_0(h_0 - \mathbf{I})s_j = 0 .$$

C'est possible puisque $g_0 - \mathbf{I}$ est inversible. Remarquons que $\|t_j\| \rightarrow \infty$ aussi, parce que $h_0 - \mathbf{I}$ est inversible. Avec ces choix, C_j est donc constant. En particulier, la classe $[C_j]$ est fixe.

Maintenant, il suffit de montrer que la paire

$$[(A_j, B_j)] \in [(g_0, t_0)] \times [(h_0, s_0)]/H$$

est divergente. Soit $D_j = (k_j, r_j) \in H$. On calcule

$$\begin{aligned} D_j^{-1}A_jD_j &= (k_j^{-1}g_0k_j, k_j^{-1}(t_0 + (g_0 - \mathbf{I})t_j + (g_0 - \mathbf{I})r_j)) \\ D_j^{-1}B_jD_j &= (k_j^{-1}h_0k_j, k_j^{-1}(s_0 + (g_0^{-1} - \mathbf{I})t_j + (h_0 - \mathbf{I})r_j)) \end{aligned}$$

Supposons que la suite $\{D_j^{-1}A_jD_j\}$ est bornée. Alors les $(g_0 - \mathbf{I})(t_j + r_j)$ sont bornés. Puisque $g_0 - \mathbf{I}$ est inversible, on déduit que $t_j + r_j$ est borné. Or, si l'on suppose que $D_j^{-1}B_jD_j$ est borné aussi, on trouve que $(g_0^{-1} - h_0)t_j$ est borné, ce qui entraîne que $(\mathbf{I} - g_0h_0)t_j$ est borné. Finalement, l'hypothèse que $\mathbf{I} - g_0h_0$ est inversible montre que $\|t_j\|$ est borné, ce qui est contradictoire.

Comme explication, notons que par les hypothèses A_j, B_j sont elliptiques. La distance entre leurs points fixes est de l'ordre de $\|t_j - s_j\|$. Par l'équation (2) on a

$$t_j - s_j = (g_0 - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I} - g_0h_0)s_j \longrightarrow \infty ,$$

alors cette distance est divergente. Par contre, C_j est elliptique aussi. On conclut que la Proposition 1 ne peut plus être valable dans ce cas.

3. LES ESPACES HYPERBOLIQUES $H^n(\mathbb{F})$.

3.1. Exemple. L'exemple le plus simple est celui de $\text{PU}(1, 1)$. Dans ce cas, $\mathcal{C} = G//G$ est identifié au cercle S^1 réunion avec l'intervalle $[1, \infty[$ (avec $S^1 \cap [1, \infty[= 1$). Le cercle correspond aux rotations (éléments elliptiques) auxquelles on a ajouté l'identité et l'intervalle correspond aux éléments hyperboliques (auxquels on a aussi ajouté l'identité). Fixons l'action standard de $\text{PU}(1, 1)$ sur le disque unitaire de \mathbb{C} . Si l'on fixe deux classes de conjugaison elliptiques $[g_1]$ et $[g_2]$, sans perte de généralité, on peut supposer que g_1 est une rotation ayant comme point fixe l'origine et g_2 une rotation dont le point fixe est dans l'axe réel. Montrer que l'application est propre est équivalent à montrer que si le point fixe de g_2 tend vers le bord du disque, la composée g_2g_1 est hyperbolique avec longueur de translation tendant vers l'infini. Ceci peut être facilement démontré, ou bien par un calcul sur la trace, ou bien par un raisonnement géométrique, en décomposant les deux rotations en utilisant trois réflexions. Les cas où les classes de conjugaison sont soit hyperboliques soit mixtes sont traités de façon analogue.

Soit \mathbb{F} un corps parmi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. On note \mathbf{I} une matrice identité dont le rang ne sera pas explicité mais devra être clair suivant le contexte. On considère l'espace vectoriel (avec action par scalaires à droite) $V^{(n,1)}(\mathbb{F})$ muni de la forme \mathbb{F} -hermitienne de type $(n, 1)$

$$\langle z, w \rangle = w^* J z$$

où w^* indique la conjugaison suivie de la transposition sur le vecteur colonne w . On utilisera les formes hermitiennes particulières :

$$J_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J_e = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J_l = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La première est utile pour exprimer les éléments paraboliques, la deuxième pour les éléments semi-simples elliptiques, et la dernière pour les éléments semi-simples loxodromiques.

On définit le groupe

$$\mathbf{U}(n, 1, \mathbb{F}) = \{ g \in \mathbf{GL}(n+1, \mathbb{F}) \mid \langle gz, gw \rangle = \langle z, w \rangle \}$$

dont le centre $Z(n, 1, \mathbb{F})$ est formé par $\pm \mathbf{I}$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ et par $\mathbf{U}(1)\mathbf{I}$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. L'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ est la projectivisation (à droite) de l'espace de vecteurs négatifs $V_- = \{ z \mid \langle z, z \rangle < 0 \}$. On a $\mathbf{H}^n(\mathbb{F}) = \mathbf{U}(n, 1, \mathbb{F}) / \mathbf{U}(1, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n, \mathbb{F})$ et l'action de $\mathbf{PU}(n, 1, \mathbb{F}) = \mathbf{U}(n, 1, \mathbb{F}) / Z(n, 1, \mathbb{F})$ sur $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ est transitive et fidèle. Mais il est utile de travailler avec le groupe $\mathbf{U}(n, 1, \mathbb{F})$.

3.2. Classes de Conjugaison Semi-simples. Les classes de conjugaison sont décrites dans [CG]. Rappelons d'abord que les éléments elliptiques ont un point fixe dans $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$, les éléments loxodromiques ont deux points fixes au bord de $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ et les éléments paraboliques ont un seul point fixe au bord de $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$. Un élément parabolique dont toute valeur propre est 1 est dit unipotent.

Proposition 3 (voir [CG], section 3). *Les classes de conjugaison d'éléments semi-simples de $\mathbf{U}(n, 1, \mathbb{F})$ sont :*

- (1) *les classes elliptiques : $\mathbf{U}(1, \mathbb{F}) \times \mathcal{C}(n, \mathbb{F})$ où $\mathcal{C}(n, \mathbb{F})$ est l'espace de classes de conjugaison du groupe \mathbb{F} -unitaire $\mathbf{U}(n, \mathbb{F})$.*
- (2) *les classes loxodromiques : $]1, \infty[\times \mathbf{U}(1, \mathbb{F}) \times \mathcal{C}(n-1, \mathbb{F})$*

Remarquons que les classes elliptiques forment un compact de $\mathcal{C} = G//G$, alors que les classes hyperboliques constituent un espace non borné.

Dans la proposition, l'inclusion $\mathcal{C}(n-1, \mathbb{F}) \hookrightarrow \mathcal{C}(n, \mathbb{F})$ identifie le bord de l'ensemble des classes loxodromiques, $\{1\} \times \mathbf{U}(1, \mathbb{F}) \times \mathcal{C}(n-1, \mathbb{F})$, avec les classes elliptiques fixant des points au bord de l'espace hyperbolique.

En utilisant la forme hermitienne donnée par J_e , un élément elliptique est conjugué à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

avec $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{F})$ et $\lambda \in \mathbf{U}(1, \mathbb{F})$. En utilisant la forme hermitienne J_l , un élément loxodromique est conjugué à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda U & 0 \\ 0 & \lambda H \end{bmatrix},$$

avec $U \in \mathbf{U}(n-1, \mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbf{U}(1, \mathbb{F})$ et

$$H = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix},$$

avec $r > 1$.

On dit que la paire (g_1, g_2) avec $g_1, g_2 \in \mathbf{U}(n, 1, \mathbb{F})$ est réductible si la représentation du groupe engendré par ces deux éléments fixe un sous-espace non-trivial de \mathbb{F}^{n+1} .

Le Corollaire 1 est une conséquence directe de la proposition suivante. Notons que par récurrence il suffit de le démontrer dans le cas $l = 3$.

Proposition 4. *L'image du produit de deux classes loxodromiques de $\mathbf{U}(n, 1, \mathbb{F})$, $n = 1, 2$, pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, contient la partie loxodromique des classes de conjugaison.*

Démonstration. Nous allons supposer $n = 2$. Le cas $n = 1$ est plus simple. L'image est fermée par le Théorème 1. Aussi, elle est ouverte sur les paires (g_1, g_2) irréductibles (voir [FW, P]). On montre maintenant que le complémentaire de l'image des réductibles est connexe. On suit le même calcul que [P] avec la forme J_l . On considère des classes de conjugaison loxodromiques $[g_1]$ et $[g_2]$ de la forme :

$$g_1 \simeq \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 r_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 r_1^{-1} \end{bmatrix} \quad g_2 \simeq \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 r_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 r_2^{-1} \end{bmatrix}$$

où A_1 et A_2 sont dans des classes de conjugaison fixes C_1 et C_2 de $\mathbf{U}(2, \mathbb{F})$.

Si le groupe engendré par g_1 et g_2 est réductible (avec le produit non elliptique), sans perte de généralité nous pouvons écrire

$$g_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 r_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 r_1^{-1} \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 a & \lambda_2 b \\ 0 & \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{bmatrix}.$$

Le produit $g_1 g_2$ sera

$$g_1 g_2 = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 H \end{bmatrix}$$

où H est une matrice de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ produit de deux matrices hyperboliques dans $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ avec longueurs de translation r_1 et r_2 . Clairement, l'image sur la partie loxodromique coïncide avec

$$]1, \infty[\times \{ \lambda_1 \lambda_2 \} \times \{ A_1 A_2 \} \subset]1, \infty[\times \mathbf{U}(1, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(1, \mathbb{F}).$$

Le complémentaire de l'ensemble image est connexe. Comme l'image est ouverte et fermée, on conclut qu'elle coïncide avec le cylindre de base $\mathbf{U}(1, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(1, \mathbb{F})$. \square

Remarque : Les cas $\mathrm{SO}_0(1, 1, \mathbb{R}) = \mathrm{PU}(1, 1, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1, \mathbb{R}) = \mathrm{PU}(2, 1, \mathbb{R}) = \mathrm{PU}(1, 1, \mathbb{C})$ sont très simples. La même preuve permet d'obtenir le résultat bien connu que l'image du produit de deux classes loxodromiques de $\mathrm{SO}_0(3, 1, \mathbb{R}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ contient la partie loxodromique de classes de conjugaison. Aussi, comme $\mathrm{SO}_0(4, 1, \mathbb{R}) = \mathrm{PU}(1, 1, \mathbb{H})$, le même argument permet d'obtenir le résultat analogue pour $\mathrm{SO}_0(4, 1, \mathbb{R})$.

3.3. Paraboliqes Unipotents. Dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ il existe une seule classe de conjugaison d'éléments paraboliques unipotents dans $\mathrm{U}(n, 1, \mathbb{R})$ pour $n > 1$ (il n'en existe pas pour $n = 1$). Dans cette section nous supposons alors que $F = \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . Dans ce cas, si $n = 1$, il existe une seule classe unipotente dans $U(n, 1, \mathbb{F})$. Dans la discussion suivante nous supposerons aussi $n > 1$.

Pour décrire les éléments paraboliques, il est utile d'utiliser la forme hermitienne J_p . Fixons un point particulier dans le bord de $\mathbb{H}^n(\mathbb{F})$

$$q_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les éléments unipotents fixant q_∞ sont (pour $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -\bar{z} & (-|z|^2 + t)/2 \\ 0 & \mathbf{I} & z^T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $z \in \mathbb{F}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{I}$, où l'on note \mathbb{I} les imaginaires purs de \mathbb{F} . Les coordonnées (z, t) peuvent être interprétées comme des coordonnées dans un groupe nilpotent $(\mathbb{F}^{n-1} \times \mathbb{I})$ et la matrice ci-dessus correspond à une translation dans le groupe, i.e.,

$$(z, t) * (z_0, t_0) = (z + z_0, t + t_0 + 2\Im(z_0^* z))$$

ou \Im note la partie imaginaire. Il existe deux classes de conjugaison paraboliques unipotentes dans $\mathrm{U}(n, 1, \mathbb{F})$, pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $n > 1$:

Proposition 5 (voir [CG, Section 3]). *On utilise la notation $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$, $\mathbf{1} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^{n-1}$. Les classes de conjugaison d'éléments paraboliques unipotents de $\mathrm{U}(n, 1, \mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $n > 1$ sont :*

– une classe (\mathbb{R} -parabolique) représentée par

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{1} & -1/2 \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{1}^T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– une classe (\mathbb{C} -parabolique) représentée par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i/2 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : Dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, cette dichotomie correspond aux paraboliques unipotents préservant ou bien un sous-espace totalement géodésique lagrangien ou bien un sous-espace totalement géodésique complexe.

Proposition 6. *Soient γ_i trois éléments unipotents de $U(n, 1, \mathbb{F})$ (avec $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, $n > 1$) tels que $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \mathbf{I}$. Alors le nombre d'unipotents \mathbb{C} -paraboliques est impair ou nul.*

Démonstration. Pour analyser un produit d'éléments paraboliques γ_1 et γ_2 , il est important de considérer les deux cas suivants :

- (1) les γ_i ont le même point fixe au bord.
- (2) les γ_i ont des points fixes distincts au bord.

Dans le premier cas, le produit $\gamma_2\gamma_1$ est aussi un élément du stabilisateur du point fixe. On peut écrire

$$\gamma_2\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}_2 & (-|z_2|^2 + t_2)/2 \\ 0 & \mathbf{I} & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}_1 & (-|z_1|^2 + t_1)/2 \\ 0 & \mathbf{I} & z_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On remarque alors que leur produit est aussi unipotent ou l'identité. Dans ce cas, on obtient que le produit d'un \mathbb{R} -parabolique avec un \mathbb{R} -parabolique peut être \mathbb{R} -parabolique ou \mathbb{C} -parabolique. Mais un produit de deux \mathbb{C} -paraboliques est toujours ou \mathbb{C} -parabolique ou l'identité. En effet le produit de deux unipotents \mathbb{C} -paraboliques est

$$\gamma_2\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_2/2 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1/2 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (t_2 + t_1)/2 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans le deuxième cas, on peut supposer que le point fixe de γ_1 est ∞ et le point fixe de γ_2 est $\mathbf{0} = (0, \dots, 1) \in \mathbb{F}^{n-1}$. Sans perte de généralité on peut écrire (la matrice de γ_2 est obtenue à partir de la matrice ci-dessus par conjugaison par J_e).

$$\gamma_2\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_2 & \mathbf{I} & 0 \\ (-|z_2|^2 + t_2)/2 & -\bar{z}_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}_1 & (-|z_1|^2 + t_1)/2 \\ 0 & \mathbf{I} & z_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La proposition découle du lemme suivant :

Lemme 2. *Si le produit de deux éléments unipotents \mathbb{C} -paraboliques est unipotent alors il est \mathbb{C} -parabolique.*

Démonstration. Le cas où les paraboliques ont un point fixe en commun a été analysé ci-dessus. On suppose alors que les point fixes sont distincts.

Le cas spécial d'éléments unipotents est

$$\gamma_2\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_2 & \mathbf{I} & 0 \\ (-|z_2|^2 + t_2)/2 & -\bar{z}_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}_1 & (-|z_1|^2 + t_1)/2 \\ 0 & \mathbf{I} & z_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si les deux éléments sont \mathbb{C} -paraboliques, $z_1 = z_2 = 0$, on obtient alors un produit parabolique si et seulement si t_1 ou t_2 est nul, autrement dit si un des éléments est l'identité. \square

Ceci montre le lemme et donc la proposition. \square

Remarque : Dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $n = 2$, on peut décrire précisément l'image d'un produit de \mathbb{C} -paraboliques. En effet, dans ce cas $z_1 = z_2 = 0$ et alors

$$\mathrm{Tr}(\gamma_2\gamma_1) = 3 - t_1t_2/4$$

Par [G, Theorem 6.2.4], l'isométrie $\gamma_2\gamma_1$ est hyperbolique si $t_1t_2 < 0$ ou $t_1t_2 > 16$, et elle est elliptique si $0 < t_1t_2 < 16$.

4. COMPACTITÉ À LA MUMFORD-MAHLER

Soit S une surface fermée orientée et $\Gamma = \pi_1(S)$ son groupe fondamental. Soit \tilde{S} le revêtement universel de la surface S . Puisque la métrique hyperbolique est uniquement déterminée par une structure complexe sur S , on le notera par le même symbole σ . De façon similaire, nous allons employer la même notation pour les métriques et les points associés dans $\mathcal{T}(S)$ et $\mathcal{M}(S)$, et les homomorphismes ρ avec leurs associés dans $\mathfrak{C}(S; G)$ et $\mathfrak{M}(S; G)$.

Étant donné un homomorphisme $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{Iso}(X)$, une application lisse $u : \tilde{S} \rightarrow X$ qui entrelace l'action de Γ sur \tilde{S} avec celle de $\rho(\Gamma)$ sur $\mathrm{Iso}(X)$ (c'est-à-dire $u(\gamma x) = \rho(\gamma)u(x)$ pour tout $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$) est dite ρ -équivariante. Pour une telle application u , la dérivée du est une section du fibré $u^*TX \otimes T^*\tilde{S}$ sur \tilde{S} . Utilisant les métriques riemanniennes sur \tilde{S} et X on a une norme $|du|$ qui est évidemment Γ -invariante; donc, $|du|$ est une fonction sur S . On définit alors l'énergie de u par

$$E_\rho(u, \sigma) = \int_S |du|^2 d\mathrm{vol}_\sigma ,$$

et puis la quantité $E_\rho(\sigma) = \inf E_\rho(u, \sigma)$, où l'infimum minimise parmi toutes les applications ρ -équivariantes. Par un changement de variables dans l'intégrale, on remarque qu'il s'agit d'une fonction bien définie sur $\mathcal{T}(S)$. Une application ρ -équivariante est appelée *harmonique tordue* si elle réalise le minimum : $E_\rho(u, \sigma) = E_\rho(\sigma)$. Si l'image de ρ n'a pas de point fixe dans la sphère à l'infini de X , l'existence des applications harmoniques tordues pour toute structure complexe σ est garantie par le théorème de Corlette-Donaldson (voir [C, Do, La, KS]).

Finalement, on s'intéresse à la fonction canonique

$$(3) \quad \mathcal{E}(\rho) = \inf_{\sigma \in \mathcal{T}(S)} E_\rho(\sigma).$$

Si $\phi \in \mathrm{Mod}(S)$ il est évident que $E_{\phi(\rho)}(\phi(\sigma)) = E_\rho(\sigma)$, alors nous avons une fonction bien définie $\mathcal{E} : \mathfrak{M}(S; G) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Proposition 7. *Pour tout $\rho \in \mathfrak{C}(S; G)$:*

$$(1) \quad \mathcal{E}(\rho) \leq 4\pi(g - 1) ;$$

(2) *L'ensemble*

$$\mu(\rho) = \{\sigma \in \mathcal{T}(S) : E_\rho(\sigma) = \mathcal{E}(\rho)\} / \text{Mod}(S)$$

est non-vide et compact.

(3) *Si u est une application ρ -équivariante telle que $E_\rho(u, \sigma) = \mathcal{E}(\rho)$, alors $|du|(x) \leq 1$ pour tout $x \in S$.*

Démonstration. L'affirmation (1) découle de (3). Pour $\rho \in \mathfrak{C}(S; G)$, la fonction $E_\rho : \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est propre (voir [GW, Theorem A]). Il existe alors un point $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ et une application u harmonique tordue satisfaisante $E_\rho(u, \sigma) = \mathcal{E}(\rho)$. Tandis que σ n'est pas nécessairement unique, l'application u est uniquement déterminée par σ . En plus, u est *conforme*, c'est-à-dire que si $\{e_1, e_2\}$ est un repère orthonormal de S en un point x où $du(x) \neq 0$, alors $du(e_1)$ et $du(e_2)$ sont orthogonaux au point $u(x)$, et $|du(e_1)| = |du(e_2)|$ (voir [SU, SY]). Rappelons la formule de Bochner pour les applications harmoniques (voir [ES]) :

$$\frac{1}{2}\Delta|du|^2 = |\nabla du|^2 + \langle du \text{ Ric}_{\tilde{g}}(e_i), du(e_i) \rangle - \langle \text{Riem}_X(du(e_i), du(e_j))du(e_j), du(e_i) \rangle .$$

Puisque les courbures satisfont $\text{Ric}_{\tilde{g}} = -1$, $\text{Riem}_X \leq -1$, il en découle que

$$\Delta|du|^2 \geq 4|du|^2(|du|^2 - 1) .$$

Le maximum de $|du|^2$ est donc forcément ≤ 1 . Il reste à démontrer la compacité de $\mu(\rho)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\rho(\gamma)| \geq \varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (voir [GW, Lemma 2.1]). Comme l'application u est uniformément Lipschitz, on a $|\rho(\gamma)|_X \leq \ell_\sigma(\gamma)$, où $\ell_\sigma(\gamma)$ note la longueur de la géodésique dans la classe d'homotopie libre de γ en (S, σ) . Alors, $\ell_\sigma(\gamma) \geq \varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et le résultat est une conséquence du théorème de Mumford-Mahler. \square

Démonstration du Théorème 2. Étant donné une suite $\rho_j \in \mathfrak{C}_\varepsilon(S; G)$, on peut supposer, grâce à la Proposition 7 (2)-(3), qu'il existe une suite $\sigma_j \in \mathcal{T}(S)$ telle que $|\rho_j(\gamma)| \leq \ell_{\sigma_j}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Puisque $|\rho_j(\gamma)|_X \geq \varepsilon$, il découle du théorème de Mumford-Mahler (après une éventuelle composition des ρ_j par l'action de $\text{Mod}(S)$) qu'il existe un compact $K \subset \mathcal{T}(S)$ avec $\sigma_j \in K$ pour tout j . En fixant une métrique hyperbolique σ il y a donc une constante C , indépendante de j , telle que $|\rho_j(\gamma)|_X \leq C\ell_\sigma(\gamma)$. En particulier, $|\rho_j(\gamma)|_X$ sont bornées pour tout γ . Puis, le résultat est une conséquence de la Proposition 2. \square

RÉFÉRENCES

- [Ab] W. Abikoff, The Real Analytic Theory of Teichmüller Space. Lecture Notes in Mathematics 820, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [AW] S. Agnihotri et C. Woodward, Eigenvalues of products of unitary matrices and quantum Schubert calculus. Math. Res. Lett. 5 (1998), no. 6, 817–836.
- [Be] P. Belkale, Local systems on $\mathbb{P}^1 - S$ for S a finite set. Compositio Math. 129 (2001), no. 1, 67–86.
- [Bers] L. Bers, A remark on Mumford's compactness theorem. Israel J. Math. 12 (1972), 400–407.
- [Bel] M. Bestvina, Degenerations of the hyperbolic space. Duke Math. J. 56 (1988), no. 1, 143–161.

- [Be2] M. Bestvina, \mathbb{R} -trees in topology, geometry, and group theory. Handbook of geometric topology, 55–91, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Bi1] I. Biswas, A criterion for the existence of a parabolic stable bundle of rank two over the projective line. *Int. J. Math.* 9 (1998), no. 5, 523–533.
- [Bi2] I. Biswas, On the existence of unitary flat connections over the punctured sphere with given local monodromy around the punctures. *Asian J. Math.* 3 (1999), no. 2, 333–344.
- [CG] S. S. Chen et L. Greenberg, Hyperbolic spaces. *Contributions to Analysis*. Academic Press, New York (1974), 49–87.
- [C] K. Corlette, Flat G -bundles with canonical metrics. *J. Diff. Geom.* 28 (1988), 361–382.
- [CS] M. Culler et P. Shalen, Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)* 117 (1983), no. 1, 109–146.
- [Do] S. Donaldson, Twisted harmonic maps and the self-duality equations. *Proc. London Math. Soc.* 55 (1987), 127–131.
- [ES] J. Eells et J. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.* 86 (1964), 109–160.
- [FMS] E. Falbel, J.-P. Marco, et F. Schaffhauser, Classifying triples of Lagrangians in a hermitian vector space, *Topology Appl.* 144 (2004), 1–27.
- [FW] E. Falbel and R. Wentworth, Eigenvalues of products of unitary matrices and Lagrangian involutions. *Topology* 45 (2006), 65–99.
- [G] W. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications (1999).
- [GW] W. Goldman et R. Wentworth, Energy of twisted harmonic maps of Riemann surfaces. *Prépublication*, 2005.
- [H1] N. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface. *Proc. London Math. Soc. (3)* 55 (1987), no. 1, 59–126.
- [H2] N. Hitchin, Lie groups and Teichmüller space. *Topology* 31 (1992), no. 3, 449–473.
- [Kim] I. Kim, Coordinates of the representation space in the semisimple Lie group of rank one. *Bull. Austral. Math. Soc.* 58 (1998), no. 3, 435–444.
- [K] A. Klyachko, Stable bundles, representation theory and Hermitian operators. *Selecta Math. (N.S.)* 4 (1998), no. 3, 419–445.
- [KS] N. Korevaar et R. Schoen, Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces. *Comm. Anal. Geom.* 5 (1997), 213–266.
- [La] F. Labourie, Existence d’applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative. *Proc. Amer. Math. Soc.* 111 (1991), 877–882.
- [M] J. Morgan, Group actions on trees and the compactification of the space of classes of $SO(n, 1)$ -representations. *Topology* 25 (1986), no. 1, 1–33.
- [MS] J. Morgan et P. Shalen, Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I. *Ann. of Math. (2)* 120 (1984), no. 3, 401–476.
- [Mu] D. Mumford, A remark on Mahler’s compactness theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 28 (1971), 288–294.
- [NS] M. Narasimhan et C. Seshadri, Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. of Math.* 82 (1965), no. 2, 540–567.
- [PP] J. Parker et I. D. Platis, *Complex hyperbolic Fenchel-Nielsen coordinates*. *Prépublication* 2005.
- [Pl] F. Paulin, Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.* 94 (1988), no. 1, 53–80.
- [P] J. Paupert, *Configurations de lagrangiens, domaines fondamentaux et sous-groupes discrets de $PU(2,1)$* . Thèse, Paris VI, 2005.
- [SU] J. Sacks and K. Uhlenbeck, Minimal immersions of closed Riemann surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 271 (1982), 639–652.

- [Sch] F. Schaffhauser, Representations of the fundamental group of an l -punctured sphere generated by products of Lagrangian involutions. A paraître dans le Canadian Mathematical Journal.
- [SY] R. Schoen and S.-T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of 3-dimensional manifolds with non-negative sectional curvature. Ann. Math. 110 (1979), 127–142.
- [S] J.-P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2 . Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, 1977.
- [Si] C. Simpson, Products of matrices. Differential geometry, global analysis, and topology (Halifax, NS, 1990), 157–185, CMS Conf. Proc., 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [TW] C. Teleman et C. Woodward, Parabolic bundles, products of conjugacy classes and Gromov-Witten invariants. Ann. Inst. Fourier. 53 (2003), no. 3, 713-748.
- [Th] W. Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds, lecture notes, Princeton University (1978-1980), <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
- [W] P. Will, Traces, Cross ratios and 2-generator subgroups of $SU(2,1)$. Prépublication 2006.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UNIVERSITÉ PARIS VI (PIERRE ET MARIE CURIE), CASE 82, 4, PLACE
JUSSIEU, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE
E-mail address: falbel@math.jussieu.fr

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, JOHNS HOPKINS UNIVERSITY, BALTIMORE, MD 21218, USA
E-mail address: wentworth@jhu.edu