QUELQUES QUESTIONS OUVERTES DE MATHÉMATIQUES, MAIS COMPRÉHENSIBLES PAR TOUT UN CHACUN!

EMMANUEL FERRAND

ABSTRACT. Une liste de quelques problèmes de mathématiques, formulables de manière simple, mais néanmoins ouverts!

1. Introduction

L'idée est répandue, dans le grand public peu informé, que les mathématiques sont un sujet mort, où tout à été découvert, ou bien que c'est un domaine ou l'on ne fait que des calculs en vue d'applications à d'autres sciences.

Le grand public "informé", lecteur d'ouvrages ou de magazines de vulgarisation, sait certainement que l'opinion précédente est fausse, et que, au contraire, même si certaines grandes questions (hypothèse de Poincaré, etc...) ont été résolues, l'éventail de problèmes ouverts est plus large que jamais. On est vraiment très loin de la fin des mathématiques!

Par contre peu de gens savent qu'il existe quelques problèmes ouverts, qui sont à la fois non-anecdotiques et de formulation très simple. Si simple, même, que parfois, **aucune connaissance préalable en mathématique n'est nécessaire** pour les saisir. Ce sont des problèmes de ce type que je voudrais aborder ici.

On imagine souvent le mathématicien comme un virtuose en manipulation de constructions abstraites. C'est parfois les cas mais bien souvent les constructions abstraites ne sont que la marche d'approche vers la véritable difficulté mathématique, intrinsèque, irréductible [1].

Une telle marche d'approche est inutile pour *formuler* les problèmes ci-dessous. Pour les résoudre, il faudra certainement construire de nouveaux concepts, de nouvelles structures. Les mathématiciens professionnels ont échoué dans cette tache. Peut-être que ceux dont l'esprit n'est pas encore trop influencé par la pratique des mathématiques traditionnelles sauront-ils découvrir la bonne approche?

`Je ne peux pas apposer de label "garanti ouvert" aux problèmes ci-dessous. A ma connaissance, ils le sont, c'est tout!`

Date: Octobre 2006.

[1]Il arrive parfois qu'une "marche d'approche" particulièrement astucieuse et élégante réduise le problème à une question facile

2. Le problème 3n+1

Pour comprendre ce problème, il est juste nécessaire de connaître les nombres entiers et les opérations.

Considérons un nombre entier N_1 quelconque. Avec cette donnée, construisons un second nombre entier N_2 en appliquant la règle suivante: Si N_1 est pair, on pose $N_2 = N_1/2$, et sinon on pose $N_2 = 3N_1 + 1$. Ré-appliquons cette règle en remplaçant N_1 par N_2: posons $N_3 = N_2/2$ si N_2 est pair et $N_3 = 3N_2 + 1$ sinon. Et continuons a appliquer de nouveau la règle avec chaque nouveau nombre obtenu: on obtient une liste d'entiers $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, \ldots$

Par exemple, si $N_1 = 3,\ N_2 = 3N_1 + 1 = 10,\ N_3 = N_2/2 = 5,\ N_4 = 3N_3 + 1 = 16,\ N_5 = 8,\ N_6 = 4,\ N_7 = 2,\ N_8 = 1,\ N_9 = 4,$ ....

.

Si l'on part de $N_1 = 7$, on obtient $N_2 = 22,\ N_3 = 11,\ N_4 = 34,\ N_5 = 17,\ N_6 = 52,\ N_7 = 26,\ N_7 = 13,\ N_8 = 40,\ N_9 = 20,\ N_{10} = 10,\ N_{11} = 5,\ N_{12} = 16,\ N_{13} = 8,\ N_{14} = 4,\ N_{15} = 2,\ N_{16} = 1,\ N_{17} = 4$,...

Dans les deux cas, on observe que l'on finit par aboutir à la boucle 1, 4, 2, 1, 4, ...

S'il on traite d'autres exemple, on s'aperçoit qu'il en est de même, et l'on pose donc la question:

Est-il vrai que, quelque soit le nombre N_1 dont on part, la suite d'entiers produite par ce procédé contient le nombre 1?

Ce problème est connu sous le nom de *conjecture de Collatz*. De nombreux travaux (voir par exemple [1]) viennent la renforcer et établissent des liens avec des domaines variés des mathématiques. Mais jusqu'à présent on ne dispose d'aucune approche nous laissant entrevoir un espoir de preuve. Paul Erdős, l'un des plus grand théoricien des nombres du vingtième siècle à dit que "les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes". Peut-être saurez vous apporter l'idée nouvelle qu'il nous manque?

3. La complexité des nombres entiers

Voici en core une question[2] ne faisant intervenir que les opérations élémentaires sur les entiers:

Etant donné un entier N, **décomposer N comme résultat d'une opération la plus courte possible, ne faisant intervenir que l'entier 1, l'addition et la multiplication**. Autrement dit on veut écrire une opération qui n'utilise que les symboles $(,), +, \cdot, 1$. On appelle *complexité de N* le nombre de 1 utilisés dans cette décomposition optimale de N.

Par exemple, $3 = 1 + 1 + 1$, la complexité de 3 est donc inférieure à 3. Mais il est clair qu'il n'existe pas de manière plus courte d'obtenir 3 comme résultat d'une opération faisant intervenir $(,), +, \cdot, 1$. La complexité de l'entier 3 est donc 3.

$4 = (1 + 1) \cdot (1 + 1)$, et on peut vérifier que la complexité de l'entier 4 est 4.

[2] voir [3]

$12 = 4 \cdot 3$, donc la complexité de 12 est inférieure à la somme de la complexité de 4 et de celle de 3, c'est à dire 7. On peut vérifier, en regardant tous les décomposition potentielle faisant intervenir moins de sept 1, que la complexité de 12 est bien égale à 7.

La question, telle que formulée ci-dessous, est, en principe, facile à résoudre: Etant donné un entier N, le décomposer de manière "stupide", par exemple $N = 1 + 1 + \cdots + 1$ (ce qui borne la complexité de N par N), puis faire la liste de toutes les écritures possibles de N utilisant moins de N nombres 1, et choisir la plus courte.

Mais cela ne donne qu'une solution virtuelle, bien trop gourmande à mettre en oeuvre. La question doit donc être comprise au sens *informel* suivant: **trouver une méthode efficace pour calculer la complexité d'un entier**[3]

Pour ceux qui désirent bien comprendre la nature du problème, il faut faire l'exercice suivant: La complexité de $46 = 23 \cdot 2 = (11 \cdot 2 + 1) \cdot 2 = ((((5 \cdot 2) + 1) \cdot 2) + 1) \cdot 2 = (((((1+1) \cdot (1+1) + 1) \cdot (1+1)) + 1) \cdot (1+1)) + 1) \cdot (1+1)$ est donc inférieure ou égale à 13. Est-elle égale à 13?

4. Nombre chromatique du plan

Derrière ce nom poétique se cache un problème d'énoncé incroyablement élémentaire:

Combien faut-il de couleurs pour peindre le plan de telle sorte que deux points éloigné d'une distance de une unité soient toujours de couleurs différentes?

La question analogue pour une droite est facile: il suffit de 2 couleurs. Il existe plusieurs coloriages du plan à 7 couleurs vérifiants la propriété demandée. Pour saisir la saveur de ce problème, il faut commencer par comprendre pourquoi 3 couleurs sont insuffisantes...

5. Tableaux de Hadamard

Soit N un nombre entier. On cherche à remplir les cases d'un damier carré de taille N par N, avec deux types de jetons. On veut que les jetons ainsi disposés soient tels que lorsque l'on considère deux colonnes distinctes, et qu'on les juxtapose, alors le nombre de lignes où les deux colonnes ont des jetons du même type soit égal au nombre de lignes où les deux colonnes ont des jetons de types differents.

Pour quelles valeurs de N est-il possible de réaliser une telle disposition des jetons?

On voit que le nombre total de lignes (soit N) doit être pair.

Dans l'exemple suivant, on désigne les deux types de jetons par les symboles $+$ et $-$.

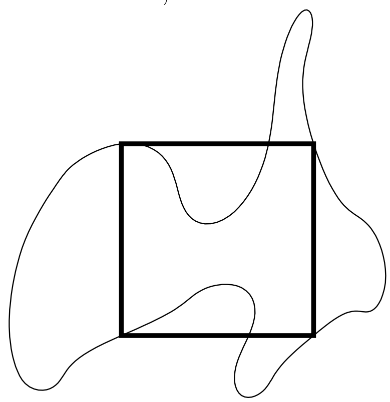
$$\begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix}$$

[3] et aussi: étudier les propriétés de cette complexité des entiers

6. Une courbe du plan contient-elle toujours les sommets d'un carré?

Sur une feuille de papier, on trace sans lever le crayon une courbe qui se referme [4]. Existe-t-il un carré dont les sommets soient situés sur cette courbe?

Ce problème[5] se passe de commentaire, mais un dessin s'impose:



7. Problème de Albrecht Dürer: Peut-on toujours déplier un polyèdre convexe?

Tout le monde a construit un jour un cube en recollant un "patron" en forme de croix découpé dans une feuille de papier. Les plus beaux polyèdres que l'on rencontre souvent dans la vie de tous les jours (icosaèdre, dodécaèdres, ...) peuvent tous être construits par un procédé de ce type.

Un *demi-espace* est juste la partie de l'espace qui se situe d'un coté donné d'un plan donné dans l'espace. Appelons *polyèdre convexe* le bord d'une région de l'espace définie comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces, disposés de telle sorte que la région soit d'extension finie dans l'espace.

Un polyèdre convexe est un assemblage de *facettes*, c'est à dire de morceaux de plans dont le bord est une ligne brisée qui se referme. Les facettes sont collées entre-elles le long des *arrêtes* pour former le polyèdre.

Est-il possible de réaliser n'importe quel polyèdre convexe en recollant un "patron" d'un seul morceau, découpé dans une feuille de papier? Autrement dit, est-il possible de découper un polyèdre convexe selon certaines de ses arrêtes, de sorte qu'ensuite il se déplie en un seul morceau et se laisse mettre à plat sans se recouvrir?

8. La rigidité des surfaces dans l'espace tridimensionnel

Pour formuler ce problème, nous utiliserons un langage imagé, faisant appel à notre intuition visuelle, mais non mathématiquement précis [6]

L'*espace tridimensionnel*, c'est notre espace ambiant. A l'intérieur de celui ci, on considère des *surfaces lisses*, c'est à dire des sphères, des tores (surfaces en forme de chambre

[4]en langage mathématique: une courbe continue, dans le plan

[5]voir [2]

[6]Cette manière de formuler des questions n'est pas rejetée pas tous les mathématiciens. Voir par exemple comment René Thom, l'un des plus importants mathématiciens français du vingtième siècle, tente de définir les nombres à l'aide de l'intuition géométrique [4]

à air), des ballons de rugby, ou toute autre surface eventuellement cabossée, mais se refermant sur elle même, sans bords (par exemple un disque n'est pas une surface lisse, puisque il a un bord), et ne *présentant pas d'arêtes ou de pointes* (par exemple un cube n'est pas une surface lisse). On peut imaginer une planète de glace, ayant légèrement fondu de sorte qu'il n'y ait plus d'aspérités, mais qu'un paysage de vallées et de collines très douces.

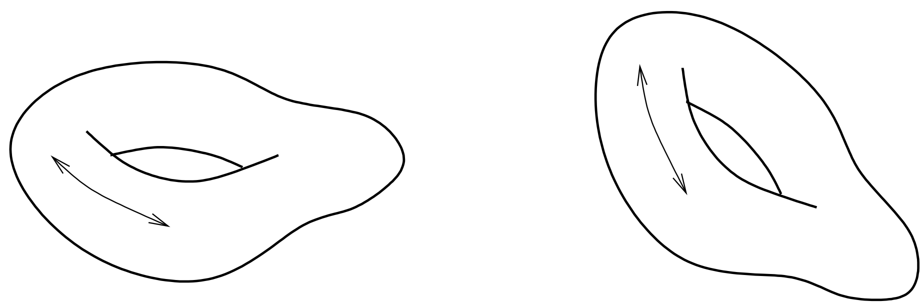
La *longueur* d'un chemin sur une surface lisse est juste la longueur d'une ficelle que l'on aurait déposée le long de ce chemin.

La *distance* entre deux points sur une surface est la longueur du plus court chemin entre ces deux points. Par exemple la distance entre les deux pôles d'une sphère est égale à la longueur d'un demi-cercle (longitude). C'est comme cela que l'on mesure les distances à la surface de la terre.

Considérons une surface lisse et *déformons la*: on peut créer des vallées, des cols, des sommets, bref la cabosser et modifier sa forme dans l'espace, mais on s'interdit des créer des arrêtes des pics, etc... La surface doit rester lisse à tout instant de sa déformation.

On dit qu'une déformation *respecte les distances* si, pour chaque couple de points sur notre surface, la distance entre ces points ne varie pas lorsqu'on les suit au cours de la déformation.

Lorsqu'on déplace une surface dans l'espace (en la poussant, en la faisant tourner selon un axe,...) on réalise un type très particulier de déformation, qui de plus respecte les distances.



Existe-il des déformations qui respectent les distances mais qui ne sont pas engendrées par un déplacement de la surface dans l'espace, comme dans l'exemple précédent?

References

[1] http://arxiv.org/abs/math.NT/0309224

[2] Croft, H. T.; Falconer, K. J.; and Guy, R. K. "Inscribing Polygons in Curves." §B2 in Unsolved Problems in Geometry. New York: Springer-Verlag, pp. 51-52, 1991.

[3] Guy, R. K. "Expressing Numbers Using Just Ones." §F26 in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, p. 263, 1994.

[4] Thom, R. "L'antériorité ontologique du continu sur le discret". (French) Le labyrinthe du continu (Cerisy-la-Salle, 1990), 137–143, Springer, Paris, 1992.

Institut Mathématique de Jussieu, UMR 7586 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu - 75252 Paris Cedex, France.

E-mail address: ferrand@math.jussieu.fr