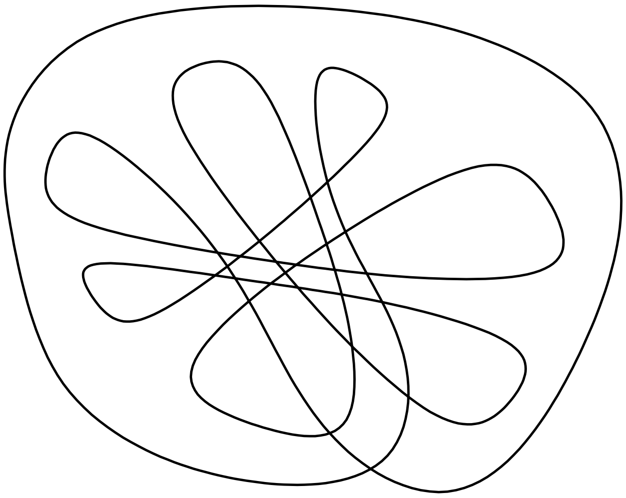
Topologie et combinatoire des sous-variétés legendriennes

Emmanuel FERRAND



Institut Mathématique de Jussieu, UMR 7586 du CNRS, UMPC, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France., (de 1998 à 2006: Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, BP 74, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France.)

E-mail address: `ferrand@math.jussieu.fr`

Inclure ici même tous les remerciements nécessaires.

Table des matières

CHAPITRE 1

Introduction : La topologie tautologique n'est pas une tautologie topologique

Dans le langage courant, le *tautologie* mot est connoté péjorativement. Il est synonyme de truisme ou de lapalissade. Pourtant son étymologie grecque est plus neutre : $\tau o\tilde{\upsilon}\tau o$ "le même" , et $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, "le discours".

Les mathématiciens, et plus particulièrement les topologues et les géomètres, se singularisent en employant l'adjectif "tautologique" pour qualifier des structures qui émergent, naturellement et sans ajout supplémentaire, de la définition de certains objets. L'exemple pertinent ici est la *1-forme tautologique* de l'espace cotangent d'une variété (connue aussi sous le nom de *1-forme de Liouville*), dont la définition est rappelée en 2.2.1 ci-dessous. En tant que variété différentielle, l'espace cotangent n'est pas différent de l'espace tangent. Et pourtant il se distingue de celui-ci en ce qu'il porte cette 1-forme canonique. Ce fait, loin d'être une tautologie, est le point de départ de développements très riches, à commencer par l'interprétation hamiltonienne de la mécanique classique.

L'essentiel des travaux que je veux présenter ici concerne cette 1-forme tautologique ou plus précisément ses proches cousines que sont la 1-forme de contact naturelle sur l'espace des 1-jets de fonctions sur une variété, et la structure de contact naturelle sur la variété des éléments de contact d'une variété donnée. Les définitions de ces objets sont rappelées au chapitre 2 ci-dessous. Je ne me lasse pas de la richesse de ces structures "tautologiques", et en ce sens, je me considère autant comme un tautologologue que comme un symplectologue.

La topologie symplectique et de contact a fait des progrès très importants depuis 20 ans, en particulier grâce à l'introduction de techniques d'analyse (courbes pseudo-holomorphes, homologie de Floer), qui culminent aujourd'hui avec la *théorie symplectique des champs* [**EGH**]. Cependant, les variétés symplectiques ou de contact intervenant naturellement en mécanique, en thermodynamique ou dans d'autres applications classiques comme la théorie des EDP du premier ordre, sont bien souvent des cotangents ou des espaces de jets, ou bien dérivent de ceux-ci par divers procédés de réduction. Dans ces cas particuliers mais importants, l'aspect "tautologique" mentionné ci-dessus donne lieu à des constructions spécifiques et très naturelles, dont certaines sont décrites dans ce texte. Elle permettent d'attaquer les questions classiques de topologie symplectique (conjectures d'Arnold, classification des plongements lagrangiens ou legendriens, etc...) sous un angle original.

Il existe une longue tradition française et russe dans le développement de ces techniques (voir, par exemple, la bibliographie du gros article synthétique de Eliashberg et Gromov [**EG**]).- C'est dans cette optique que je place les articles [**5**],[**7**], [**8**] et [**10**], alors que [**4**] relève de le géométrie différentielle. Les articles [**1**], [**2**],[**3**], [**6**] et [**9**] concernent eux aussi les mêmes objets, mais n'utilisent que des raisonnements combinatoires ("topologie de dimension 2"). Les notes combinatoires [**11**] et [**12**] sont indépendantes, bien qu'initialement motivées par des questions de topologie.

Ce texte est organisé comme suit : Le chapitre 2 introduit de manière aussi élémentaire que possible les structures qui seront discutées ensuite. Le chapitre 3 mentionne quelques conjectures et problèmes généraux qui motivent les résultats, qui eux sont exposés au chapitre 4. La longue bibliographie qui termine ce texte introductif n'est certainement pas complète. Mais elle devrait suffire en tant que point de départ vers toutes les autres sources.

La plupart de mes articles sont disponibles sur ma page web :
`http ://math.jussieu.fr/ ˜ferrand/`

Remarque. Dans ce texte, les références numérotées ([**1**], [**2**],. . ., [**12**]) concernent mes travaux. Les autres références utilisent des lettres (par exemple, [**AG**]).

CHAPITRE 2

Tautologie de contact

Je vais tenter de décrire de manière aussi élémentaire que possible l'univers tautologique évoqué plus haut, à savoir cet ensemble d'objets et de structures qui forment, entre autres, le cadre mathématique naturel de la mécanique, de la thermodynamique, de l'étude de la propagation des ondes dans l'approximation des hautes fréquences ou encore de la théorie géométrique des EDP du premier ordre. Outre les définitions importantes, je vais rappeler une liste de faits plus ou moins élémentaires, plus ou moins connus et folkloriques, qui se trouvent dans l'intersection des travaux que je veux présenter ensuite. Les avoir en tête sera utile pour aller directement à l'essentiel.

A l'exception de quelques points de géométrie symplectique élémentaire, que l'on pourra ignorer au premier abord et que j'ai choisi de ne pas traiter pour préserver la légèreté de ce texte, les prérequis pour comprendre le chapitre qui va suivre et le suivant se réduisent au calcul différentiel (variétés, sous-variétés, espace tangent et cotangent, formes différentielles), et aux rudiments de la théorie de Morse. Ces notions sont présentées de manière élémentaire dans, par exemple, [**Va0**]. On trouvera dans [**AG**] une discussion plus détaillée des notions mal définies et des affirmations non démontrées exposées informellement ci-dessous.

2.1. Notations et conventions

On ne considère dans ce texte que des variétés *lisses*, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$, et des fonctions de même classe définies sur ces variétés. Les lettres M, N désigneront des variétés (souvent compactes), les lettres q et Q des points dans de telles variétés, ou bien, par abus de notation, des coordonnées locales $q = (q_1, \dots, q_d)$. La lettre p désignera le plus souvent un covecteur, alors que P sera réservée pour l'espace projectif réel. J'utiliserai aussi souvent la notation abusive (q, p) pour désigner un point dans un cotangent. La sphère standard de dimension d est désignée par S^d, et on utilisera parfois sa réalisation comme sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{d+1}$, avec les propriétés "euclidiennes" qui en découlent.

2.2. Structures tautologiques

Soit donc M une variété de dimension m, et T^*M son fibré cotangent.

2.2.1. La 1-forme de Liouville. Soit $\pi\ : T^*M \to M$ la projection naturelle. Soit x un point de T^*M, et X un vecteur tangent à T^*M en x. Puisque $D\pi_x(X)$

est un vecteur tangent à M en $\pi(x)$, on peut lui appliquer le covecteur x. On pose $\lambda(X) = x(D\pi_x(X))$.

Cette 1-forme différentielle λ définie sur T^*M est la $1-$*forme tautologique*, aussi appelée *1-forme de Liouville.* Elle vérifie $\eta^*\lambda = \eta$, pour toute section η de $\pi : T^*M \to M$, (c'est-à-dire pour toute 1-forme η sur M).

A tout atlas de M, on peut canoniquement associer un atlas de T^*M. Autrement dit, à tout système de coordonnées locales $q = (q_1, \ldots, q_m)$ sur M, on peut associer des coordonnées $(q,p) = (q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$, dites *coordonnées canoniques.* Dans ces coordonnées, λ s'écrit $pdq = \sum_{i=1}^m p_i dq_i$.

2.2.2. Sous-variétés lagrangiennes. La différentielle $\omega = d\lambda$, qui s'exprime donc localement dans des coordonnées canoniques par $\omega = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$ est une 2-forme fermée, partout non-dégénérée. C'est la forme *symplectique standard* de T^*M. Les sous-variétés de T^*M de dimension n sur lesquelles la restriction de ω s'annule sont dites *lagrangiennes.* Celles pour qui la restriction de λ est de surcroît exacte sont dites *lagrangiennes exactes.* Le graphe d'une 1-forme fermée est une sous-variété lagrangienne de T^*M. Le graphe de la différentielle d'une fonction sur M est une lagrangienne exacte, et réciproquement toutes les lagrangiennes exactes qui de plus sont des graphes sont de ce type. Etant donné une sous-variété N immergée dans M, le *fibré conormal* de N, c'est-à-dire l'ensemble des covecteurs qui s'annulent sur l'espace tangent de N, est une sous-variété lagrangienne exacte (immergée) de T^*M. La forme λ est en fait nulle sur une telle sous-variété.

Une sous-variété lagrangienne exacte compacte plongée dans T^*S^1 n'est pas autre chose qu'une courbe lisse plongée qui délimite avec la section nulle une région d'aire algébrique nulle. On voit ainsi que de tels objets sont relativement flexibles : on peut les déformer facilement, bien qu'il y ait une une contrainte globale d'aire à respecter. En dimension supérieure, la contrainte est plus subtile. Ce mélange de flexibilité et de rigidité est un trait typique de la topologie symplectique.

2.2.3. Les éléments de contact. Un *élément de contact* de M est la donnée d'un point de M, et d'un hyperplan tangent à M en ce point. Autrement dit, l'ensemble de tous les éléments de contact s'identifie avec PT^*M, la projectivisation fibre à fibre de T^*M. L'ensemble des éléments de contact *coorientés* s'identifie quant à lui avec ST^*M, la *sphérisation* fibre à fibre de T^*M.

Notons π la projection naturelle $\pi : PT^*M \to M$. En tout point x de PT^*M, on définit un hyperplan tangent ζ_x par la formule "tautologique" $\zeta_x = \pi^*x$. En effet, puisque x peut aussi être considéré comme hyperplan dans $T_{\pi(x)}M$, on peut le tirer en arrière par π (voir fig. 2.1). Ce champ d'hyperplans ζ, appelé *structure de contact naturelle de la variété des éléments de contact de M*, n'est autre que l'image du champ des noyaux de la forme de Liouville λ après projectivisation. Les sous-variétés de dimension $m-1$ partout tangentes à de ce champ d'hyperplans sont dites *legendriennes.* On peut montrer que $m-1$ est la dimension maximale des sous-variétés intégrales de ζ.

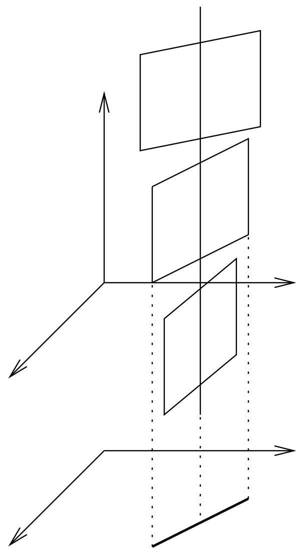


FIG. 2.1. Le champ de contact tautologique.

Etant donné une sous-variété immergée N dans M, la projectivisation du conormal de N s'identifie à l'ensemble des éléments de contact tangents à N. C'est, par construction, une sous-variété legendrienne de PT^*M, *le relevé legendrien* de N. J'explique dans [**7**], théorème A, comment construire un large éventail de sous-variétés legendriennes de PT^*M en généralisant quelque peu cette construction.

Tout ceci peut se répéter dans le cadre "coorienté" : Notons encore π la projection naturelle $\pi : ST^*M \to M$. Une construction analogue à la précédente permet de définir un champ d'hyperplans "tautologique" ζ sur ST^*M. L'hyperplan de contact est cette fois-ci naturellement coorienté. Il existe donc une 1-forme définie globalement sur ST^*M dont ζ est le champ des noyaux. Choisissons une métrique riemannienne arbitraire sur M, afin d'identifier les espaces tangent et cotangent. On obtient ainsi une métrique sur chaque fibre du T^*M, et si l'on note $||p||$ la norme d'un covecteur, on voit que ST^*M peut s'identifier avec l'ensemble des (co)vecteurs de norme 1. Le champ d'hyperplans coorientés ζ s'identifie alors au champ des noyaux de la 1-forme λ restreinte à l'hypersurface $||p|| = 1$. On peut montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs R sur ST^*M, (le champ de Reeb de la forme λ), dont le flot préserve la structure de contact et qui de plus vérifie $d\lambda(R, \cdot) = 0$ et $\lambda(R) = 1$. Le flot de R est précisément le flot géodésique de la métrique riemannienne choisie. La structure de contact ζ est préservée par ce flot.

2.2.4. Relevés legendriens et coorientation. Dans ce contexte coorienté, chaque sous-variété N immergée dans M possède encore un relevé legendrien dans ST^*M. Si N est une hypersurface coorientable de M, alors le relevé possède deux composantes connexes. Si de plus on *précise explicitement* que l'hypersurface est *coorientée*, alors, par convention, on n'appellera "relevé legendrien" que *la composante connexe correspondant à cette coorientation.* Notons aussi que si N est un nœud dans

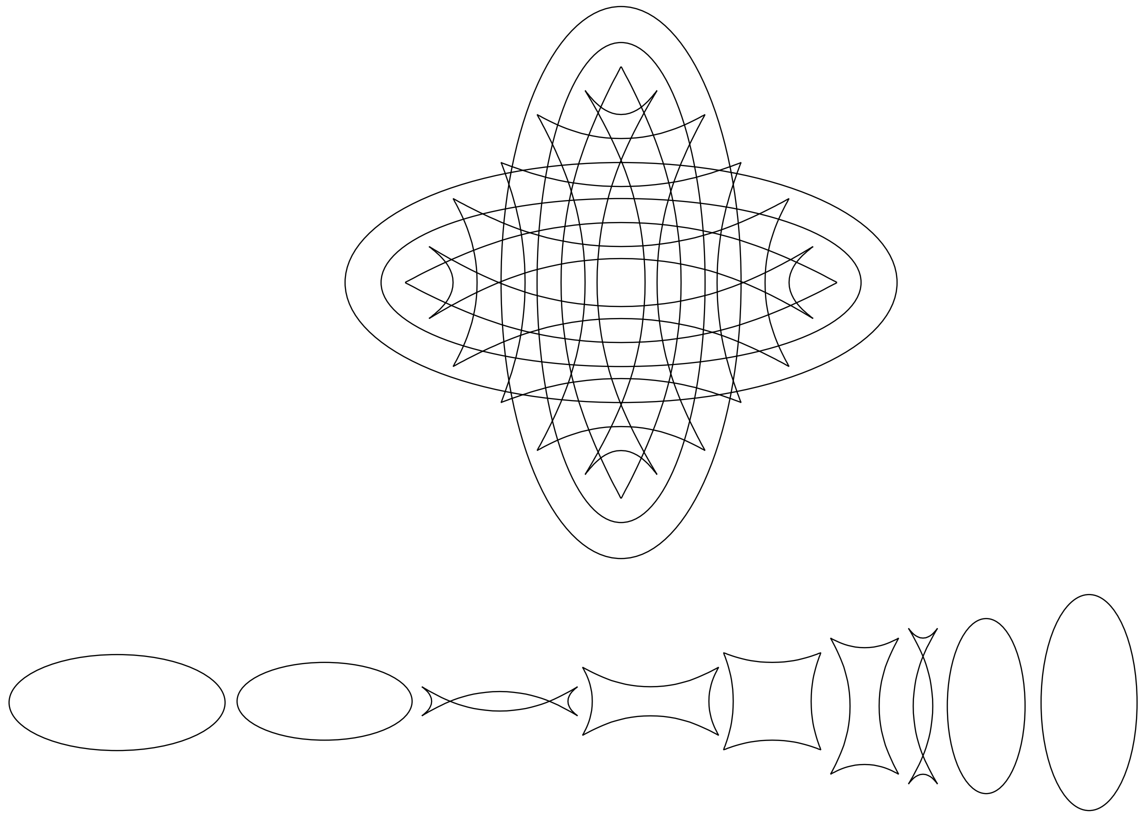


FIG. 2.2. Equidistantes d'une ellipse.

$M = S^3$, le relevé legendrien est un tore plongé dans la variété de dimension ST^*S^3. Une isotopie de N dans S^3 se relève en une isotopie des relevés. Ainsi tout invariant des tores legendriens dans ST^*S^3 se tirera en arrière en un invariant d'isotopie des nœuds (Cette idée vient d'être mise en pratique de manière fructueuse par Lenny Ng [**Ng1**]).

2.2.5. Fronts d'onde. La description ci-dessus du flot géodésique en termes de géométrie de contact montre que les équidistantes dans M d'une sous-variété N de M, c'est-à-dire les points de M obtenus comme extrémités des segments géodésiques normaux à N et de longueur fixée, sont les projections de l'image du relevé legendrien de N dans ST^*M par le flot géodésique (ces équidistantes sont en général des hypersurfaces singulières, voir fig. 2.2). Ceci justifie l'utilisation du terme *front d'onde* (ou plus simplement du mot *front*) pour désigner l'image d'une sous-variété legendrienne par la projection $\pi\ : ST^*M \to M$.

2.2.6. Variétés de contact. On pourrait définir les variétés de contact comme les variétés munies d'un champ d'hyperplans localement modelées sur les variétés d'éléments de contact et leur champ d'hyperplans tautologique. Mais on s'exposerait à quelques inconvénients en procédant ainsi et je me cantonne à la définition traditionnelle. Etant donné une 1-forme α générique sur une variété de dimension

$2m+1$, la forme de degré maximal $\alpha \wedge (d\alpha)^m$ sera non-nulle hors d'un ensemble de codimension 1. C'est la cas où cet ensemble est vide qui nous interessera : On appelle *structure de contact* sur une variété de dimension impaire un champ d'hyperplans qui doit pouvoir partout être décrit localement comme le champ de noyaux d'une 1-forme α vérifiant $\alpha \wedge (d\alpha)^m \neq 0$. La non-annulation de $\alpha \wedge (d\alpha)^m$ implique que le champ d'hyperplans se comporte à l'inverse d'un champ intégrable (pour lequel on aurait $\alpha \wedge d\alpha = 0$). Une structure de contact est *maximalement non-intégrable*, au sens où les variétés intégrales sont de dimension au plus m. Les variétés intégrales de dimension maximale sont dites *legendriennes*.

Fort heureusement, un calcul montre que les variétés d'éléments de contact définies précédement sont des variétés de contact au sens de la définition ci-dessus. En fait, d'après un théorème dit "de Darboux", toutes les structures de contact en dimension donnée sont localement équivalentes. Par ailleurs, toute variété de contact se plonge contactomorphiquement dans sa variété des éléments de contact. C'est une conséquence de la propriété tautologique de ζ : pour tout champ d'hyperplans ξ sur M, c'est-à-dire pour toute section de $PT^*M \to M$, on a $\xi^*\zeta = \xi$. Si de plus ξ est une structure de contact, la formule précédente indique que M, identifée à l'image de la section ξ, peut se voir comme une sous-variété "de contact" de PT^*M. Cette vue "extrinsèque" sur les variétés de contact "abstraites" est une motivation supplémentaire pour l'étude des variétés d'éléments de contact.

2.2.7. Les espaces de jets et leurs sous-variétés legendriennes. On appelle $J^1(M, \mathbb{R})$ le produit $\mathbb{R} \times T^*M$, qui s'identifie à l'ensemble des 1-jets de fonctions sur M. Si l'on note u la coordonnée correspondant au facteur $\mathbb{R}$, cette variété de dimension impaire est munie de la *forme de contact standard* $\alpha = du - \lambda$. Comme il se doit, le champ des noyaux de cette 1-forme est une structure de contact.

A toute fonction f sur M, on peut associer son *1-graphe*, qui est la sous-variété de dimension n de $J^1(M, \mathbb{R})$ définie par

$$j^1 f = \{(u, p, q) \in J^1(M, \mathbb{R}) \text{ tels que } q \in M, p = \partial_q f(q), u = f(q)\}.$$

Par construction, la 1-forme α s'annule sur $j^1 f$, qui est donc une sous-variété legendrienne. De manière générale, les sous-variétés lagrangiennes exactes immergées dans T^*M sont précisément les lagrangiennes qui se relèvent en des immersions legendriennes dans $J^1(M, \mathbb{R})$.

$J^1(M, \mathbb{R})$ peut se voir comme l'ouvert dans $PT^*(\mathbb{R} \times M)$ formé des éléments de contact de $\mathbb{R} \times M$ transverses à la direction $\mathbb{R}$. Le 1-graphe d'une fonction f s'identifie alors au relevé legendrien du graphe de f.

2.2.8. Fronts d'onde, diagrammes de Cerf et familles génératrices. La projection $\sigma : J^1(M, \mathbb{R}) \to J^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times M$, est, comme la projection $\pi : ST^*M \to M$ (ou $\pi : PT^*M \to M$) une projection dont les fibres sont *legendriennes*. A l'aide d'une variation sur le théorème de Darboux évoqué plus haut, on peut montrer que les *feuilleutages legendriens* en dimension donnée n'ont pas d'invariants locaux, ils sont tous localement contactomorphes. Il en résulte que les

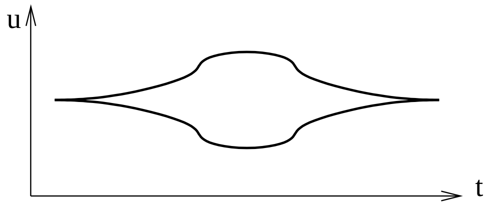


FIG. 2.3. Diagramme de Cerf de la famille $f(t,x) = x^3 + (1-t^2)x$.

singularités des projections de sous-variétés legendriennes sur la base d'une fibration legendrienne sont localement équivalentes à celle d'un front d'onde (voir 2.2.5). On utilise donc aussi le terme *front* pour désigner l'image d'une legendrienne par une fibration legendrienne, et en particulier l'image par σ d'une sous-variété legendrienne de $J^1(M,\mathbb{R})$. Ainsi les singularités locales des fronts sont indépendantes du contexte (PT^*M, ST^*M ou $J^1(M,\mathbb{R})$) dans lequel ce mot est utilisé.

Etant donné une famille générique à 1 paramètre $\{f_t, t \in [0,1]\}$ de fonctions définies sur une variété compacte W, l'ensemble de valeurs de t pour lesquelles les fonctions f_t ne sont *pas* de Morse avec toutes leurs valeurs critiques distinctes est fini. Pour ces instants isolés, deux valeurs critiques peuvent *naître, mourir, ou bien se croiser* (voir par exemple [**Va0**]). Dans les deux premiers cas, la fonction, à l'instant de naissance/mort, n'est pas de Morse. Lorsque l'on suit en fonction de t (représenté par un axe horizontal) les valeurs critiques des fonctions f_t (représentées sur l'axe vertical au-dessus de t), on obtient le *diagramme de Cerf* de la famille $\{f_t, t \in [0,1]\}$ (voir les exemples des figures 2.3 et 2.4).

Ce diagramme comprend des points de rebroussement de première espèce, qui correspondent aux naissances/morts, et des croisements normaux. Ce sont les singularités génériques des fronts de dimension 1. Ce n'est pas un hasard, car il existe bien un nœud legendrien dans $J^1([0,1],\mathbb{R})$ qui se projette sur le diagramme de Cerf, ainsi que le montre la construction ci-dessous.

Il s'agit de la construction des *familles génératrices*, très importante pour la suite, et qui réalise un lien fondamental entre la théorie de Morse et la topologie de contact. Etant donné une variété auxiliaire quelconque W et une fonction F définie sur le produit $M \times W$, on considère le sous ensemble L_F de $J^1(M,\mathbb{R})$ défini comme suit :

$$L_F = \{(u,p,q) | \exists w \in W \ \text{ tel que } \partial_w F(q,w) = 0, u = F(q,w), p = \partial_q F(q,w)\}$$

Cette construction s'étend au cas d'une fonction F définie sur l'espace total d'un fibré de base M, mais cette généralité n'est pas utilisée dans la suite. Les exemples 2.3 et 2.4 rentrent bien dans ce cadre si l'on identifie q et t, et w et x.

Il se trouve (voir la discussion en termes de réduction ci-dessous) que l'ensemble L_F ainsi défini est génériquement une *sous variété legendrienne plongée* dans $J^1(M,\mathbb{R})$ (et dans la suite je vais abusivement qualifier toutes les L_F que l'on rencontrera de

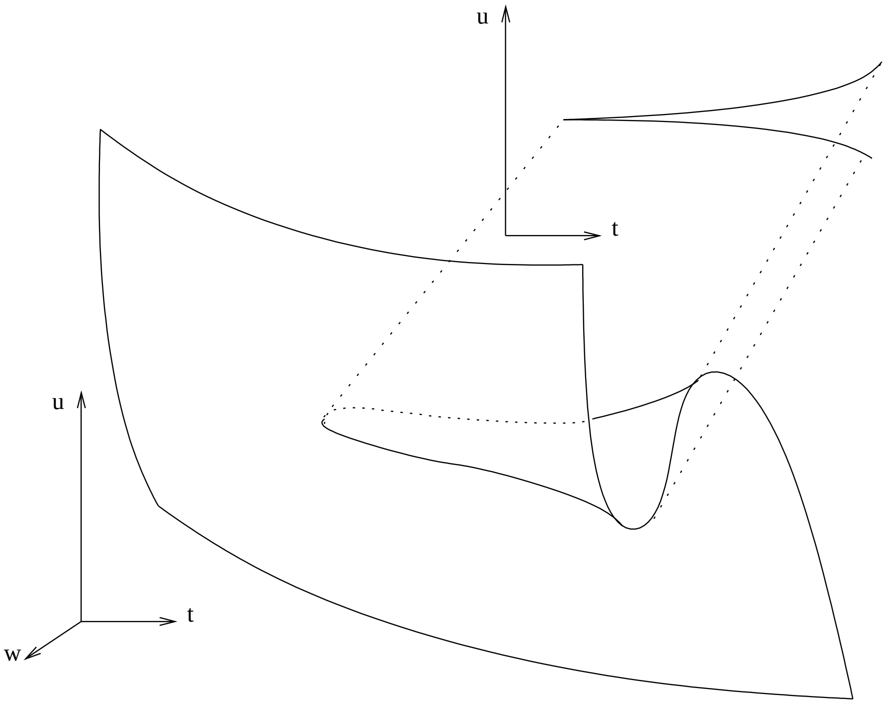


FIG. 2.4. Le diagramme de Cerf est le contour apparent du graphe.

sous-variétés legendriennes). Le front de L_F décrit les bifurcations des valeurs critiques de la famille de fonctions $F(q,\cdot) : W \to \mathbb{R}$, paramétrée par $q \in M$. On peut aussi montrer que *toute sous-variété legendrienne de $J^1(M,\mathbb{R})$ s'identifie, au voisinage de chacun de ses points, à une variété de type L_F*, avec F bien choisie. Ainsi l'étude locale des sous-variétés legendriennes se ramène à l'étude de familles de fonctions. Cette remarque est le point de départ de tout un chapitre, initié par Arnold, de la théorie des singularités (voir [**AGV**]).

2.2.9. Réduction de contact. Soit maintenant N une sous-variété de codimension 1 dans M. La restriction des fonctions de M à N induit une sorte de "restriction" des sous-variétés legendriennes de $J^1(M,\mathbb{R})$ à celles de $J^1(N,\mathbb{R})$, qui, du point de vue des fronts dans $J^0(M,\mathbb{R})$, s'interprète réellement comme la généralisation de la restriction des graphes de fonctions au-dessus d'une sous-variété.

Soit C la restriction au-dessus de N du fibré $J^1(M,\mathbb{R}) \to M$. L'espace total de $C \subset J^1(M,\mathbb{R})$ est de codimension égale à celle de N dans M. Il existe une projection naturelle $R : C \to J^1(N,\mathbb{R})$, et si une legendrienne $L \subset J^1(M,\mathbb{R})$ est transverse à C, on voit que l'intersection $L \cap C$ est de dimension égale à celle de N, c'est-à-dire de la dimension des legendriennes dans $J^1(N,\mathbb{R})$. Le fait fondamental est que sous cette hypothèse de transversalité, $R(L\cap C)$ *est une sous-variété legendrienne immergée* dans $J^1(N,\mathbb{R})$. Cette variété "réduite" est même plongée quitte à, éventuellement, perturber un peu L.

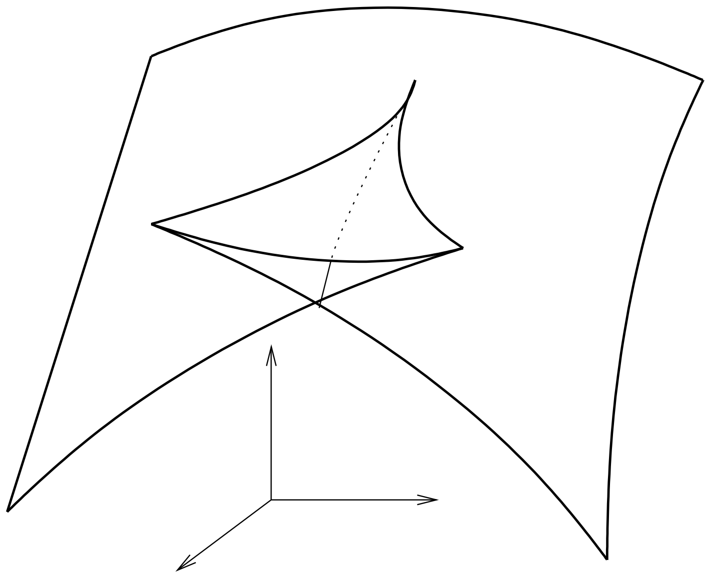


FIG. 2.5. Une tranche de front d'onde, à proximité d'une queue d'aronde.

Si N est le bord de M, on peut considérer $J^1(N,\mathbb{R})$ comme le "bord de contact" de $J^1(M,\mathbb{R})$ (le véritable bord de $J^1(M,\mathbb{R})$, qui est de dimension paire, n'est pas une variété de contact). C'est le point de vue adopté par Arnold pour développer sa théorie des cobordismes legendriens [**Va1**].

Ce cas particulier de réduction de contact est particulièrement visuel. Au niveau des fronts d'onde, cela ne revient qu'à prendre la banale trace au dessus de N.

Par exemple, la *queue d'aronde* (fig. 2.5) est une singularité typique des fronts de dimension 2. Une "tranche" de queue d'aronde présente bien les singularités typiques des fronts de dimension 1 (points de rebroussements de première espèce, croisements normaux).

Cette idée de restriction au dessus de de la sous-variété N se généralise au cas où cette dernière est de codimention quelconque. Voyons maintenant comment la construction des familles génératrices (2.2.8) s'interprète comme une telle réduction de contact.

Supposons un instant que $M = \mathbb{R}^m$ et que N soit un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$. Soit W un supplémentaire de N dans M. Notons (q,w), $q \in N, w \in W$ les points de M et (p,v), $p \in N^*, v \in W^*$ les covecteurs de M^*. L'application

$$\Phi\ : (q,w,p,v,u) \to (q,v,p,-w,u-vw)$$

est un contactomorphisme de $J^1(M,\mathbb{R})$ (c'est une transformation de Legendre partielle, voir 2.2.10.4). Elle envoie C, qui ici s'identifie au sous-espace $w=0$, sur le sous-espace $v=0$. Etant donné une fonction $F\ : N \times W \to \mathbb{R}$ comme en 2.2.8, l'ensemble $L_F \subset J^1(N,\mathbb{R})$ n'est autre que la réduction au-dessus de N de l'image par Φ du 1-graphe $j^1F \subset J^1(M,\mathbb{R})$ de F.

2.2.10. La dualité projective et ses avatars. La transformation de Legendre évoquée au paragraphe précédent est une des multiples incarnations de la dualité projective.

2.2.10.1. *Le contactomorphisme d'Arnold.* Soit P l'espace projectif réel de dimension d et $P^\vee$ l'espace projectif dual. P est la projectivisation de $\mathbb{R}^{d+1}$, $P^\vee$ est la projectivisation de l'espace vectoriel dual $(\mathbb{R}^{d+1})^*$. Un point de $P^\vee$ s'identifie donc naturellement avec un hyperplan projectif dans P et, réciproquement, $P = (P^\vee)^\vee$.

Un élément de contact de P est un couple (q, H), où H est un hyperplan tangent à P en q. L'hyperplan tangent H détermine un hyperplan projectif $Q^\vee$ contenant q. Réciproquement, un élément de contact de $P^\vee$ s'identifie à un couple $(Q^\vee, q)$, où $q \in P = (P^\vee)^\vee$ désigne un hyperplan projectif dans $P^\vee$ passant par $Q^\vee$.

L'interprétation de la dualité projective popularisée par Arnold [**Ar4**] peut se résumer ainsi : *L'identification $(q, Q^\vee) \leftrightarrow (Q^\vee, q)$ entre PT^*P et $PT^*P^\vee$ induit un contactomorphisme* entre les structures de contact naturelles de ces deux espaces.

La variété de contact PT^*P est donc munie de *deux fibrations legendriennes* $\pi : PT^*P \to P$ et $\pi^\vee : PT^*P \to P^\vee$. L'hyperplan de contact en un point $x \in PT^*P$ est engendré par la somme directe des espaces tangents des fibres de π et de $\pi^\vee$ passant par x. L'hypersurface (en générale singulière) duale d'une sous-variété $N \subset P$ au sens traditionnel du terme n'est autre que le front $\pi^\vee(L_N)$ de son relevé legendrien L_N.

2.2.10.2. *Dualité sphérique.* La version coorientée de la dualité projective, elle aussi contactisée de manière harmonieuse par Arnold [**Ar5**], est la suivante : pour simplifier, considérons la sphère euclidienne de dimension 2. L'espace ST^*S^2 s'identifie naturellement avec SO_3, étant donné qu'un hyperplan coorienté tangent en un point à S^2 détermine de manière univoque un repère direct de $\mathbb{R}^3$. Si l'on remonte sur S^3 (revêtement double de SO_3) la structure de contact de ST^*S^2, on obtient *la structure de contact standard de S^3* (définie plus traditionnellement comme le champ de plans tracé sur $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ par les droites complexes).

Le flot ϕ géodésique de la métrique euclidienne de S^2 est périodique de période 2π. Soit $\phi_{\frac{\pi}{2}}$ ce flot considéré au temps $\frac{\pi}{2}$. Soit $\pi : ST^*S^2 \to S^2$ la projection naturelle, et $\pi^\vee = \pi \circ \phi_{\frac{\pi}{2}}$. Si l'on considère une courbe coorientée γ sur S^2, elle se relève en un nœud legendrien L_γ dans ST^*S^2, et $\gamma^\vee = \pi^\vee(L_\gamma)$ peut légitimement être qualifié de *front dual* de γ. En effet, si l'on identifie chaque grand cercle coorienté avec le pôle de l'hémisphère désigné par la coorientation, $\gamma^\vee$ représente bien l'ensemble des équateurs coorientés tangents à γ.

La structure de contact est ici encore engendrée par la somme directe des espaces tangents aux fibres de deux fibrations legendriennes, $\pi : ST^*S^2 \to S^2$, et la fibration $\pi^\vee$ au-dessus de l'espace S^2 des équateurs coorientés, et dont la fibre au-dessus d'un point est le relevé legendrien de l'équateur coorienté en question.

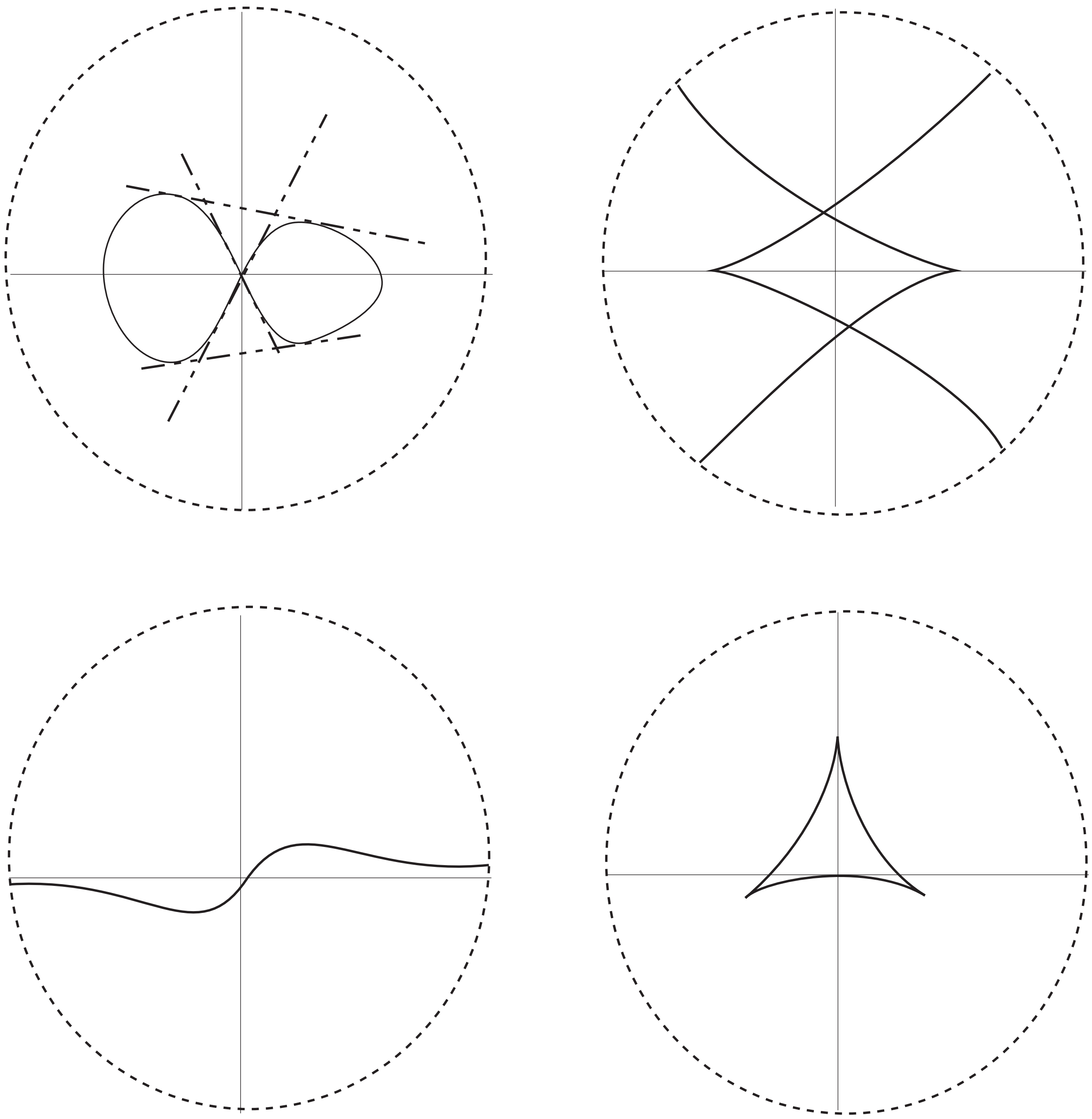


FIG. 2.6. En haut : Une courbe plane immergée et sa courbe duale. En bas : Déformation d'une droite projective, et sa courbe duale, projection de la déformation d'une fibre de $\pi^\vee : PT^*P \to P^\vee$.

2.2.10.3. *Transformation dite de l'hodographe, coordonnées d'Euler, fonctions support.* Considérons l'hémisphère nord de S^2, que l'on identifie avec $\mathbb{R}^2$ par projection centrale sur le plan tangent à S^2 au pôle nord. Ainsi $ST^*\mathbb{R}^2$ peut s'identifier à un ouvert U de ST^*S^2. L'image $\phi_{\frac{\pi}{2}}(U)$ de cet ouvert par $\phi_{\frac{\pi}{2}}$ est l'ensemble des éléments de contact du *cylindre* $S^2 \setminus \{\text{pôles}\}$ qui sont transverses aux longitudes, et dont la coorientation pointe vers le sud. Si l'on identifie la sphère privée de ses pôles à $\mathbb{R} \times S^1$ par projection centrale sur le cylindre tangent à la sphère le long de l'équateur, on voit que $\phi_{\frac{\pi}{2}}(U)$ s'identifie avec $J^1(S^1, \mathbb{R})$.

Ce contactomorphisme entre $ST^*\mathbb{R}^2$ et $J^1(S^1, \mathbb{R})$, qui se généralise facilement en un contactomorphisme entre $ST^*\mathbb{R}^n$ et $J^1(S^{n-1}, \mathbb{R})$, est sous-jacent à plusieurs transformations astucieuses, telles la *paramétrisation d'Euler des courbes planes* et la *transformation de l'hodographe* (paramétrisation des trajectoires dans le plan en fonction de la direction du vecteur vitesse), ou encore la *théorie des fonctions support des corps convexes*. Soient (q_1, q_2, θ) les coordonnées naturelles de $ST^*\mathbb{R}^2$ ((q_1, q_2) désigne un point de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in S^1$ un angle). La forme de contact standard du tangent unitaire du plan est $\cos(\theta)dq_1 + \sin(\theta)dq_2$. Notons $du - pd\theta$ la forme de contact standard de $J^1(S^1, \mathbb{R})$ (notations de 2.2.7). Le contactomorphisme s'explicite alors par :

$$(q_1, q_2, \theta) \to (u = \langle \theta, (q_1, q_2) \rangle, p = (q_1, q_2)_{\perp\theta}, \theta),$$

où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien standard, et $X_{\perp\theta}$ la projection du vecteur X sur l'hyperplan orthogonal au vecteur unitaire θ. L'image par ce contactomorphisme du relevé legendrien d'une courbe lisse, bordant un domaine strictement convexe du plan et coorientée vers l'extérieur, est le 1-graphe d'une fonction définie sur le cercle. C'est *la fonction support* du convexe.

2.2.10.4. *Transformation de Legendre.* Soit maintenant V l'ouvert de $ST^*\mathbb{R}^2$ constitué par les éléments de contact coorientés de $\mathbb{R}^2$ qui sont positivement transverses à une direction donnée, par exemple la direction verticale $\frac{\partial}{\partial q_2}$. Si l'on note r la pente d'un de ces éléments de contact, la structure de contact de V est induite par la forme $dq_2 - rdq_1$, ce qui donne une identification naturelle de V avec $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par ailleurs l'image de V par le contactomorphisme précédent est $J^1(]0, \pi[, \mathbb{R}) \subset J^1(S^1, \mathbb{R})$. Quitte à identifier $]0, 1[$ avec $\mathbb{R}$ et à renommer correctement les variables, le contactomorphisme précédent devient la *transformation de Legendre* de $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même, qui au triplet (q, p, u) associe $(-p, q, u - pq)$.

Appliquée au 1-graphe d'une fonction convexe f de la variable q, elle renvoie le 1-graphe de la fonction convexe "duale" $\tilde{f} : Q \to \min_q(qQ + f(q))$. La transformation de Legendre est d'ordre 4, comme la transformation de Fourier, dont elle est une sorte de version "classique". Cette dernière assertion prend un sens précis de deux manières au moins. La première provient de la théorie de l'oscillateur harmonique. La transformation de Legendre relève à $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans l'espace $T^*\mathbb{R}$. Cette rotation s'obtient en intégrant jusqu'au temps $\frac{\pi}{2}$ le flot hamiltonien de la fonction $\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, qui représente la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique. La version quantique du flot hamiltonien est une famille à un paramètre d'opérateurs différentiels, et la transformation de Fourier apparaît naturellement dans le cas de l'oscillateur harmonique. L'autre point de vue est celui de Maslov [**LM**], qui montre que la transformation de Legendre est la transformation de Fourier pour les fonctions à valeurs dans la *déquantification* du corps des réels, le semi-anneau idempotent $(\mathbb{R}, max, +)$.

2.2.10.5. *Dualité projective et géométrie extrinsèque des courbes et des surfaces.* Pour clore ce chapitre "tautologique", je ne résiste pas à l'envie d'évoquer brièvement la géométrie différentielle extrinsèque des courbes et des surfaces. Un certain nombre de notions classiques, souvent considérées comme vieillottes et calculatoires, trouvent en effet dans ce cadre une explication "tautologique".

La dualité projective entre les fronts du plan échange points d'inflexions et points de rebroussement de première espèce. La dualité entre fronts bidimensionnels dans l'espace projectif de dimension 3 échange les lignes de points de rebroussement avec les lignes paraboliques (le lieu des points de "courbure nulle", c'est-à-dire où la surface n'a localement pas une tangence quadratique non-dégénérée avec son plan tangent en ce point) et les queues d'arondes avec les "godrons" de Thom [**BT**]. (Voir aussi [**Ar6**], [**Ur3**],[**Pa3**]). Il existe dans ce cadre lisse et réel des analogues des formules de Plücker en géométrie algébrique (voir, par exemple, [**3**]).

Un cas méconnu et très utile est celui de la géométrie des courbes spatiales. Etant donné un plongement $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$, l'ensemble des vecteurs vitesse normalisés dessine une courbe Γ sur la sphère S^2. Cette courbe est lisse pourvu que la courbure de γ soit partout non nulle (ce qui est une condition générique). Le lieu sur S^2 de la binormale (le vecteur unitaire du trièdre de Frenet normal au plan osculateur) n'est autre que dual de Γ dans S^2. C'est un front en général singulier, dont les points de rebroussement correspondent aux points de γ où la torsion est nulle. *La courbe dans $SO_3 = ST^*S^2$ formée par les trièdres de Frenet est une courbe legendrienne, génériquement plongée.*

CHAPITRE 3

Problèmes et conjectures

Dans ce chapitre, je veux rappeler certaines des grandes questions qui motivent mes travaux.

3.1. Conjectures d'Arnold

Dans sa version originale (prouvée dans des cas particuliers importants par Conley-Zehnder [**CZ**] et Chaperon [**Cha0**], puis en toute généralité par Hofer, Laudenbach et Sikorav [**Ho**], [**LS**]), la conjecture est la suivante :

3.1.1. La conjecture d'Arnold dans les cotangents. Soit M une variété compacte et L une sous-variété lagrangienne exacte de T^*M hamiltoniennement isotope à la section nulle $O_M \subset T^*M$. Alors le nombre d'intersections (comptées avec multiplicité) entre L et O_M est au moins égal à la somme des nombres de Betti de M.

Dans cet énoncé, "L hamiltoniennement isotope à O_M" signifie que l'on peut joindre L et O_M par un chemin lisse de sous-variétés lagrangiennes exactes plongées. Lorsque L est proche de O_M, c'est un graphe et ce graphe est celui de la différentielle d'une fonction sur M. Les intersections entre L et O_M correspondent alors aux points critiques de cette fonction (et les intersections transverses aux points de Morse). La conjecture se réduit alors à l'inégalité de Morse totale pour cette fonction. La question d'Arnold est donc de savoir si ces intersections, nécessaires pour les petites déformations de O_M parmi les Lagrangiennes exactes, persistent pour les grandes déformations.

3.1.2. FGQI. Un des outils fondamentaux développés par les précurseurs cités ci-dessus pour attaquer ce problème est la notion de *famille génératrice quadratique à l'infini* (FGQI). Il s'agit de familles génératrices au sens de 2.2.8, pour lesquelles la variété auxiliaire W est un espace vectoriel de dimension paire $2d$, et telles que $F(q, w)$ s'identifie hors d'un compact avec une forme quadratique d'indice d de la variable vectorielle. Sikorav [**Si2**] montre que, sous les hypothèses de la conjecture, L se relève dans $J^1(M, \mathbb{R})$ en une legendrienne L_F, où F est une FGQI. Les intersections de L avec O_M sont en correspondance bi-univoque avec les points critiques de F. L'hypothèse "quadratrique à l'infini" assure, par un argument standard de théorie de Morse, qu'une FGQI possède le nombre requis de points critiques.

3.1.3. Remarques. La borne inférieure sur le nombre d'intersections ainsi obtenue dans le cas transverse est le *nombre de Morse stable de* M, c'est-à-dire le minimum du nombre de points critiques des FGQI de Morse, qui majore la somme des nombres de Betti. On ne sait pas si, dans cette estimation, on peut remplacer le nombre de Morse stable par le *nombre de Morse de* M, (le minimum du nombre de points critiques des fonctions de Morse sur M, qui est parfois strictement supérieur au nombre de Morse stable de M [**Da**]).

Les applications des familles génératrices en géométrie symplectique ne se limitent pas à la conjecture d'Arnold. Voir par exemple [**Vi1**] et [**Vi2**]. Enfin, cette manifestation des familles génératrices suggère d'interpréter la conjecture d'Arnold en termes de géométrie de contact.

3.2. Version contact de la conjecture d'Arnold

Une isotopie hamiltonienne dans T^*M se relève en une famille à un paramètre de sous-variétés legendriennes plongées (la projection dans T^*M d'une legendrienne plongée est en général une lagrangienne exacte seulement immergée). Deux sous-variétés legendriennes dans une variété de contact seront dites *Legendre-isotopes* ou encore *legendriennement équivalentes* si elles sont les extrémités d'une famille lisse à un paramètre de plongements legendriens. Dans cette section, M est toujours une variété compacte.

3.2.1. Théorème de Chekanov. ([**Che1**], voir aussi [**Cha1**]) L'ensemble des legendriennes de type L_F, où F est une FGQI, est clos par isotopie legendrienne : Soient F une FGQI et L une sous-variété legendrienne de $J^1(M,\mathbb{R})$ legendre-isotope à L_F. Alors il existe une FGQI G telle que $L = L_G$.

Ainsi la projection dans T^*M d'une legendrienne legendre-isotope à $j^1 0$ possède-t-elle un nombre d'intersections avec O_M (comptées avec multiplicité) au moins égal au nombre de Morse stable de M. Cette généralisation de la conjecture d'Arnold est subtile : Dans le cas où M est le cercle S^1, la conjecture "hamiltonienne" est immédiate puisqu'alors les lagrangiennes exactes compactes ne sont que les courbes plongées délimitant une aire algébrique nulle avec la section nulle. Elle se doivent d'intersecter celle-ci. Par contre il existe des immersions lagrangiennes exactes dans T^*S^1 sans intersection avec la section nulle, mais homotopes à celle-ci parmi les immersions lagrangiennes exactes. On peut d'ailleurs déduire [**We2**] de ce cas particulier que, pour toute variété compacte M dont la caractéristique d'Euler est nulle[1], il est possible de disjoindre O_M d'elle-même parmi les *immersions* lagrangiennes exactes. D'après le théorème de Chekanov, lors d'une telle homotopie, on doit trouver au moins un instant pour lequel le relèvement legendrien de l'immersion lagrangienne exacte n'est pas plongé dans $J^1(M,\mathbb{R})$.

[1]Dans [**We2**] on suppose de plus que la dimension de M différente de 3.

3.2.2. Un principe général d'Arnold. Cette version contact de la conjecture d'Arnold est l'exemple le plus frappant d'un type de résultat dont nous allons rencontrer dans la suite plusieurs occurrences (en particulier les théorèmes principaux de [**5**] [**7**], [**8**] et [**10**]), et qui sont tous modelés sur le même principe :

On s'intéresse à une propriété de type "coexistence globale de singularités", vérifiée ou non par des objets géométriques d'une certaine classe : existence de singularités sur les fronts d'onde, intersection des immersions lagrangiennes avec la section nulle, complexité du domaine hyperbolique sur une surface immergée dans l'espace euclidien, etc.... On est dans une situation ou l'on peut plus ou moins canoniquement associer une sous-variété legendrienne à nos objets. On démontre (ou on conjecture) que la propriété considérée est vérifiée par un objet si la legendrienne associée appartient à une certaine classe d'isotopie legendrienne.

3.2.3. Théorème de Givental. Il s'agit de la contactisation par Givental [**Giv**] du théorème de Fortune-Weinstein[2] [**FoWe**]. Soit $\mathcal{L} \subset ST^*S^2$ l'union des relevés legendriens de tous les parallèles à un équateur donné, à laquelle on ajoute les relevés legendriens des deux parallèles dégénérés que sont les pôles (autrement dit on ajoute les fibres au-dessus de ces pôles). Ainsi $\mathcal{L}$ est un tore dans ST^*S^2, feuilleté par des cercles legendriens (le relevé legendrien de chaque parallèle fournit deux cercles, ces deux familles de cercles se recollent au-dessus des pôles). Soit L un nœud legendrien dans la classe d'isotopie legendrienne de l'un de ces cercles. Givental montre que L intersecte $\mathcal{L}$ en au moins deux points distincts, alors que l'on peut disjoindre L de $\mathcal{L}$ par une déformation parmi les immersions legendriennes.

3.2.4. Contactisation du théorème de Möbius sur les inflexions. D'après un théorème Möbius [**Moe**] toute courbe *plongée* dans le plan projectif réel P^2 dans la classe d'homotopie d'une droite projective possède au moins trois points d'inflexion. Il existe des courbes immergées dans la même classe d'homotopie n'ayant qu'un unique point d'inflexion. Pour faire disparaître deux des inflexions, il a fallu qu'à un moment lors de l'homotopie la courbe présente une *auto-tangence* (cela arrive au moment où l'on sort de la classe des courbes plongées). En termes de relevé legendrien dans PT^*P^2, cette auto-tangence s'interprète comme une auto-intersection du nœud legendrien.

D'après 2.2.10.1, on a l'image "duale" suivante : Une *petite* déformation générique L d'une fibre de $\pi : PT^*P^2 \to P^2$ doit être telle que $\pi_{|L}$ possède au moins trois points de rebroussement de première espèce (voir fig. 7 ; c'est le théorème de Möbius appliqué à $\pi^\vee(L)$). Une singularité au moins est nécessaire pour des raisons topologiques, et, on l'a vu, il est aisé de faire mourir ensemble deux rebroussements en déformant la fibre parmi les *immersions legendriennes*. Arnold a demandé ([**Ar0**], problème 1994-18) si l'on peut réduire à une le nombre de singularités sans changer

[2]Théorème qui est trivial dans le cas particulier de la dimension 2 auquel je me limite dans ce paragraphe, alors que sa généralisation par Givental est aussi difficile dans ce cas particulier que dans le cas général.

le type d'isotopie legendrienne. Ce problème est, semble-t-il, encore ouvert à ce jour (voir [**Pa1**]).

Arnold suggère aussi des analogues de cette question en dimension supérieure : estimer la complexité des courbes paraboliques (nombre de telles courbes, nombre de godrons) sur des déformations du plongement standard du plan projectif réel dans l'espace projectif réel de dimension 3 [**Ar6**] [**Pa2**]. Avant même de prouver une version bidimensionnelle du théorème de Möbius et de contactiser cette dernière, le premier problème consiste ici à formuler la conjecture (quelle est la manière naturelle de mesurer la complexité de la courbe parabolique ?).

3.2.5. Courbure totale des immersions. Voici un exemple élémentaire. Soit γ une courbe que l'on suppose être le bord connexe d'une surface S de genre $g > 0$ *immergée* dans plan. On peut montrer que sa *courbure totale* (l'intégrale sur γ de la valeur absolue de la courbure géodésique) est supérieure à $2\pi(1 + 2g)$. Or on peut aussi montrer que l'indice de Whitney de γ (l'intégrale de la courbure, divisée par 2π) est égal, au signe près, à $\chi(S) = 1 - 2g$, où $\chi(S)$ est la caractéristique d'Euler dela surface. Cet indice classifie à lui seul les immersions [**Wh**], et donc γ est isotope parmi les immersions du cercle à une courbe standard *localement convexe* $\gamma_{\chi(S)}$ dont la courbure totale est $2\pi(2g - 1)$.

Lors d'une homotopie générique d'immersions du cercle, on peut observer des moments isolés d'auto-tangence ou des points triples. *Tant que l'on déforme γ sans procéder à une auto-tangence*, on peut suivre la déformation de la courbe par une déformation de l'immersion de la surface à bord, et la courbure totale de γ restera minorée par $2\pi(2g + 1)$. De plus, étant donné que l'intégrale de la courbure est $2\pi\chi(S)$, deux points d'inflexion sont nécessaires. Bien entendu, les auto-tangences de la courbe s'interprètent comme un changement de la classe d'isotopie legendrienne de son relevé dans $PT^*\mathbb{R}^2$. Un tel changement est nécessaire pour faire disparaître les deux inflexions.

Ces considérations élémentaires sur la courbure totale peuvent se généraliser de manière non-triviale au cas coorienté, ainsi qu'aux immersions de variétés de dimension supérieure dans les espaces de courbure constante, quitte à choisir la bonne notion de courbure totale.

3.2.6. Nœuds de Frenet. On a vu en 2.2.10.4 qu'à tout nœud γ dans $\mathbb{R}^3$ dont la courbure géodésique ne s'annule pas (c'est une condition générique), on peut associer un nœud legendrien L dans $ST^*S^2 = SO_3$, l'ensemble de ses trièdres de Frenet, qui se projette sur le lieu $\Gamma \subset S^2$ des vecteurs vitesse (la courbe duale $\Gamma^\vee$ etant le lieu des binormales). Si le nœud de départ est un cercle contenu dans un plan, Γ est un grand cercle et $\Gamma^\vee$ est réduit à un point.

Lorsqu'on déforme un peu ce cercle parmi les courbes à courbure partout non-nulle, la déformation induite du nœud legendrien associé L n'est pas arbitraire : Γ doit impérativement intersecter tout grand cercle (sinon γ ne se refermerait pas). On peut montrer [**Ar5**] que la courbe Γ doit alors avoir au moins 4 inflexions sphériques

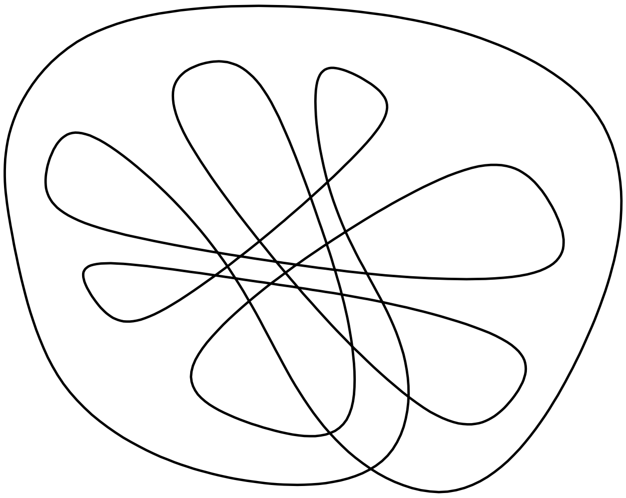


FIG. 3.1. Le bord d'une surface planaire de genre 2. Pour faire disparaître ses deux inflexions, il faut la déformer jusqu'à changer le type de nœud legendrien associé.

(comptées avec multiplicité), autrement dit *une petite déformation générique du cercle plat possède au moins 4 points où la torsion s'annule* (voir [**Ar8**] pour une généralisation aux courbes dans les espaces euclidiens de dimension supérieure).

La question est de savoir jusqu'où il faut déformer γ pour faire disparaître ces singularités de la torsion. La conjecture (ouverte à ce jour) de R. Uribe [**Ur1**] [**Ur2**] à ce sujet est que *au moins 4 inflexions (comptées avec multiplicité) persistent tant que le type d'isotopie legendrienne du nœud de Frenet associé n'est pas changé.*

3.2.7. Singularités inévitables pour retourner le cercle. Les problèmes 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.6 qui précèdent partent tous d'une situation géométrique très non-générique (par exemple, pour ce qui est de compter les inflexions, le plongement de S^1 dans P^2 sous la forme d'une droite projective est complètement dégénéré). On la déforme et on se demande quel est le nombre minimal de singularités inamovibles, rendues globalement nécessaires par la topologie (de contact). Le problème suivant est aussi de ce type, même s'il ne rentre pas complètement dans le cadre du principe 3.2.2.

Lorsque l'on considère les équidistantes d'un cercle coorienté (vers l'intérieur, par exemple), c'est-à-dire que l'on fait évoluer ce front circulaire par le flot géodésique de la métrique euclidienne du plan, on observe une famille de cercles qui se contracte sur un point, puis qui réapparaît avec la coorientation opposée. Lorsqu'on déforme cette situation très non-générique, c'est-à-dire que l'on remplace les cercles par des ellipses, on observe le phénomène suivant : toute ellipse (non circulaire) possède une équidistante avec 4 points de rebroussement (voir fig. 2.2). Arnold a conjecturé en 1993 ([**Ar0**], problème 1993-9) que toute isotopie legendrienne générique $\{L_t, t \in [0,1]\}$ dans $ST^*\mathbb{R}^2$ reliant les deux composantes (correspondant aux deux coorientations possibles) du relevé legendrien dans $ST^*\mathbb{R}^2$ d'un cercle plongé dans $\mathbb{R}^2$ est telle qu'il existe un instant $t \in]0,1[$ tel que le front $\pi(L_t)$ possède au moins 4 points de rebroussement.

Il existe des familles *d'immersions* legendriennes reliant les deux composantes du relevé d'un cercle et dont les fronts ont au plus deux points de rebroussement. En 2002, Pushkar et Chekanov [**ChP**] ont montré que ceci est impossible si l'on se limite aux familles de *plongements* legendriens, démontrant ainsi la conjecture d'Arnold. La preuve, relativement longue et technique, a motivé l'introduction d'un invariant d'isotopie legendrienne inspiré de la théorie des familles génératrices ("les décompositions des fronts d'ondes"), que nous retrouverons en 3.3.3.

3.3. Classification des nœuds legendriens

3.3.1. Il s'agit du problème de la classification modulo isotopie legendrienne des sous-variétés legendriennes d'une variété de contact. Les immersions legendriennes vérifient un h-principe (voir, par exemple, [**EM**]) et leur classification se ramène donc à une question d'algèbre. La classification, plus fine, modulo *isotopie legendrienne* reste encore largement mystérieuse, même dans le cas le plus étudié, celui des nœuds legendriens dans les variétés de contact de dimension 3.

Si l'on suppose ce problème algébrique résolu, il subsiste une obstruction évidente à ce que deux legendriennes soient legendriennement isotopes : il faut avant tout qu'il n'y ait pas d'obstruction topologique, c'est-à-dire qu'elle soient isotopes parmi les plongements lisses. Si la variété ambiante est de dimension 3, et si de plus la structure de contact est coorientée, alors un nœud legendrien hérite d'une trivialisation de son fibré normal (c'est un nœud *framé*). On dit alors que deux nœuds legendriens *ont les mêmes invariants classiques* s'ils sont dans la même composante connexe de l'espace des *immersions* legendriennes, et si de plus ils sont équivalents en tant que nœuds framés. Le problème est donc le suivant : *étant donné deux nœuds legendriens ayant les mêmes invariants classiques, sont-ils legendriennement isotopes ?*

La réponse est en général négative. Ce raffinement de la théorie des nœuds a attiré beaucoup d'attention. Les techniques de topologie de contact en dimension 3 développées par Giroux [**Gi1**] permettent de classifier les représentants legendriens de certains types topologiques simples [**EH**]. Historiquement, le premier exemple de deux nœuds legendriens ayant les mêmes invariants classiques mais néanmoins legendriennement distincts à été donné en 1995 [**Tr**] en raisonnant sur des familles génératrices, la variété ambiante étant $J^1(S^1,\mathbb{R})$ (voir aussi [**0**, chap. 1] et 4.2.2 pour un exemple de deux nœuds legendriennement non-équivalents dans le tore $T^3 = ST^*T^2$, bien qu'ayant les mêmes invariants classiques).

3.3.2. Digression. Dans ces deux exemples anciens, les nœuds ne sont pas contenus dans des boules plongées. Ce détail prend un sens particulier à la lumière de la digression suivante. En dimension 3, les variétés de contact se divisent en deux classes, en fonction des propriétés de leurs boules plongées. Une structure de contact sur une variété de dimension 3 est dite *tendue*[3] si toute boule plongée se laisse isotoper par une isotopie de contact dans l'intérieur de tout autre boule ouverte plongée. La structure est dite *tordue* si elle n'est pas tendue. Dans une structure tendue, toute boule plongée est contactomorphe à une boule dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, puisque les structures de contact de dimension fixée sont toute localement équivalentes. Dans une structure tendue, les boules plongées quelconques possèdent donc des coordonnées "de Darboux", alors que ceci n'est vrai que pour les "petites" boules dans les variétés tordues. Dans les structures tordues, il existe des nœuds legendriens *non-locaux*, c'est-à-dire qu'on ne peut les déformer jusqu'à les inclure dans une boule arbitrairement petite par une isotopie legendrienne, sans qu'il n'y ait d'obstruction à le faire par une isotopie générale. Cette situation évoque le cas des variétés de dimension 3 contractiles et non-homéomorphes à la boule standard, dans lesquelles il existe des nœuds non locaux, au sens où ils ne sont équivalents à aucun nœud contenu dans des petites boules standard (ou des ouverts de carte). Par définition, $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est tendue. On peut montrer que, pour toute surface M, ST^*M est tendue.

Pour illustrer ces notions, on peut faire l'observation suivante : Etant donné une fonction $F\ : S^1 \times W \to \mathbb{R}$, où W est une variété compacte ou bien un espace euclidien, auquel cas on exige de plus que F soit quadratique à l'infini au sens de 3.1.2, alors *la sous-variété legendrienne* $L_F \subset J^1(S^1,\mathbb{R})$ *n'est pas contenue dans une boule plongée*. En effet, si c'était le cas, on pourrait isotoper legendriennement L_F dans une boule arbitrairement petite, $J^1(S^1,\mathbb{R})$ étant tendue. Cependant, une variation sur le théorème de Chekanov (voir 3.2.1) assure que l'image de L_F par cette isotopie est de la forme L_G, pour une fonction $G\ : S^1 \times W \times \mathbb{R}^{2d}$, égale à une forme quadratique de la variable vectorielle hors d'un compact. Pour chaque $\theta \in S^1$, la fonction $G(\theta,\cdot)\ : W \times \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ possède des points critiques. Ainsi L_G doit intersecter chaque fibre $\mathbb{R} \times T^*_\theta S^1$ et ne peut donc pas être contenue dans une boule trop petite (fin de la digression).

3.3.3. Classification dans $\mathbb{R}^3$. Il se trouve que le problème consistant à exhiber des exemples de couples de nœuds legendriens distincts ayant les mêmes invariants classiques est étrangement beaucoup plus compliqué lorsque la variété de contact ambiante est la plus simple possible, c'est-à-dire l'espace euclidien tridimensionnel $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les immersions legendriennes du cercle (orienté) sont classifiées par un unique entier : le plan de contact est transverse aux fibres de la projection $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to T^*\mathbb{R}$. Etant donné un nœud legendrien orienté, sa projection dans $T^*\mathbb{R}$ est donc une courbe orientée immergée. L'indice de Whitney de cette immersion, c'est-à-dire le nombre de tours effectué par son vecteur vitesse lorsqu'on la parcourt une fois, qui classifie cette immersion à homotopie régulière près dans le

[3] La définition traditionnelle est différente mais coïncide avec celle donnée ci-dessus (qui présente l'avantage de ne pas être spécifique à la dimension 3), d'après les résultats combinés de Giroux et Eliashberg [**Gi0**] [**Gi1**] sur la classification des structures de contact en dimension 3 (voir [**Co**]).

plan (théorème de Whitney [**Wh**]), suffit à la classifier en tant qu'immersion lagrangienne exacte. Ce degré est appelé *indice de Maslov* de l'immersion legendrienne sous jacente.

Une isotopie legendrienne est un cas particulier de ce qu'en théorie des nœuds, on appelle une *isotopie régulière*. Si l'on choisit une décomposition de $\mathbb{R}^3$ en produit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, un nœud dans $\mathbb{R}^3$ générique est *non-vertical*, c'est-à-dire transverse à la fibre de la projection choisie. A un nœud (orienté) non-vertical, on peut associer l'indice de Whitney de l'immersion sur laquelle il se projette dans le plan, ainsi que son auto-enlacement vis-à-vis de la direction de projection[4]. Deux nœuds non-verticaux sont dit *régulièrement isotopes* s'ils sont isotopes parmi les nœud non-verticaux. Cela à lieu si et seulement si ils sont isotopes au sens traditionnel, et s'ils ont même indice de Whitney et même auto-enlacement. Une isotopie legendrienne est en particulier une *isotopie régulière* vis-à-vis de la projection $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to T^*\mathbb{R}$, puisque la direction $\frac{\partial}{\partial u}$ est transverse au plan de contact. Nous avons vu que l'indice de Whitney s'appelle indice de Maslov dans notre contexte. L'autre invariant d'isotopie régulière, l'auto-enlacement, est *l'invariant de Bennequin* [**Be**] de notre nœud legendrien. Dire que deux nœuds ont mêmes invariants classiques, c'est donc dire qu'ils ont le même type de nœuds topologique, le même invariant de Bennequin, et le même indice de Maslov.

En 1997, Chekanov [**Che2**] a mis au point un invariant combinatoire des nœuds legendriens inspiré de *l'homologie de contact relative* de Eliashberg, Givental et Hofer ([**EGH**]) qui lui a permis d'exhiber un couple de nœuds legendriens dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ legendriennement distincts, mais ayant les mêmes invariants classiques (voir aussi [**Ng1**], [**Sa1**], [**NT**], [**ENS**], [**EFM**] pour la postérité de cette version combinatoire de l'homologie de contact). Peu après, une autre construction (la décomposition des fronts) [**ChP**], [**Che3**], inspirée par la théorie des familles génératrices, à permis d'aboutir à la même conclusion. Des liens ont ensuite été trouvés entre les deux procédés [**Fu**],[**FI**], [**Sa2**], qui expérimentalement distinguent les mêmes nœuds.

En dimension supérieure, les techniques de familles génératrices restent aussi efficaces pour distinguer des sous-variétés legendriennes. Dans cet ordre d'idées, les résultats de [**5**], [**7**],[**8**] et [**10**], qui garantissent que certaines propriétés globales des fronts sont des invariants d'isotopie legendrienne, peuvent être utilisés "en sens inverse", pour distinguer des nœuds legendriens. L'homologie de contact relative est maintenant bien définie dans le cas des sous-variétés legendriennes de $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ [**EES1**], [**EES2**], mais reste difficilement calculable en l'absence d'une description combinatoire analogue à celle proposée par Chekanov en dimension 3.

3.3.4. Réalisibilité. Une autre question importante (détaillée en 4.5) consiste à déterminer les valeurs prises par les invariants classiques. En effet, l'un des résultats fondamentaux de la topologie de contact [**Be**] est qu'*il n'est pas possible de réaliser*

[4] Il faut porter une attention particulière à la compatibilité des choix d'orientation lorsqu'on manipule véritablement ces nombres.

toutes les classes d'isotopie régulière de nœuds dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *par des nœuds legendriens.* S'il est aisé de construire des nœuds legendriens de n'importe quel type topologique et réalisant n'importe quelle valeur de l'indice de Maslov, l'invariant de Bennequin est contraint par différentes inégalités (voir par exemple [**6**] et 4.5) faisant intervenir des invariants purement topologiques.

Dans le même ordre d'idées, on peut se demander quelles sont les sous-variétés legendriennes de $J^1(M,\mathbb{R})$ réalisables par des familles génératrices quadratiques à l'infini, ou bien quelles sont les classes d'isotopies legendriennes de PT^*M qui contiennent des relevés legendriens d'immersions dans M.

CHAPITRE 4

Résultats

4.1. Contours

L'article [**7**] est le résultat de ma lente digestion (débutée avec [**5**]) de la théorie des familles génératrices et du théorème de Chekanov (voir 3.2.1). Historiquement la théorie fut développée en France par Chaperon, Laudenbach, Sikorav, Viterbo, Théret, ainsi que par l'école russe : Givental, Chekanov, Pushkar. Les contributions de ces auteurs sont reprises dans un gros article de Eliashberg et Gromov [**EG**], auquel je renvoie pour une bibliographie plus complète[1], et dans lequel cette théorie est portée à un très haut degré de généralité.

4.1.1. Familles génératrices et contours apparents. La preuve du théorème de Chekanov que j'ai proposée dans [**5**] n'est pas éloignée conceptuellement des preuves classiques, ni même de celle de la version symplectique du théorème ([**LS**]). Mais elle fait apparaître un certain nombre de formules, qui possèdent une interprétation géométrique en termes *d'enveloppes*. Si l'on garde en mémoire que le diagramme de Cerf d'une famille de fonctions est un *contour apparent* (voir 2.2.8 et fig. 2.4), cela suggère une version "éléments de contact", "géométrique", du théorème de Chekanov. Cette piste, dont la possibilité est brièvement mentionnée à la fin de [**5**], fait l'objet de [**7**]. Pour formuler cette version géométrique, quelques précisions sur la notion de contour apparent sont nécessaires.

4.1.2. Contours apparents. Soient M et N deux variétés, et ϕ une application lisse de N dans M. Un *point critique* de ϕ est un point de N où la différentielle de ϕ n'est pas surjective. Une *valeur critique* est l'image par ϕ d'un point critique. Le *contour de ϕ est l'ensemble des valeurs critiques de ϕ*. Cette terminologie abusive provient du cas particulier où N est une surface (par exemple un relief montagneux) immergée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, que l'on regarde dans la direction du facteur $\mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs critiques est la projection sur le plan $\mathbb{R}^2$ de l'ensemble des points où le plan tangent à la surface N contient la direction de projection. Le contour que l'on observe est une partie du contour défini plus haut, à moins que N ne soit translucide, auquel cas les deux notions coïncident.

Si $dim(M) > dim(N)$, tout point est critique et le contour coïncide avec l'image de ϕ en entier. Si $dim(M) = dim(N) = 2$, on peut montrer (c'est encore un théorème de Whitney, voir [**AGV**]) que, génériquement, ϕ sera un difféomorphisme local dans le complémentaire d'une courbe lisse, le long de laquelle ϕ réalisera un *pli*, sauf en

[1] Mais voici déjà de quoi lire : [**Cha0**][**Cha1**][**La**][**LS**][**Si1**] [**Si2**][**Vi1**][**Vi2**] [**Giv**] [**Che1**].

quelques points isolés où ϕ réalisera une *fronce de Whitney*. L'image dans M de cette courbe lisse sera une courbe immergée hors des fronces, où l'on observera des points de rebroussement. Cette situation est celle illustrée par la figure 2.4 du chapitre 2, ce qui n'est pas un hasard, puisque *les diagrammes de Cerf sont des exemples de contours* (dans les notations de 2.2.8, la variété source est $N = M \times W$, la variété but est $J^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times M$, l'application ϕ associe $(u = f(q, w), q)$ au couple (q, w)).

4.1.3. Contours et réduction. L'exemple des diagrammes de Cerf conduit à généraliser la notion de fonction génératrice comme suit. A une application ϕ telle que précédemment, on associe le sous-ensemble $l_\phi \subset PT^*M$ défini par :

$$L_\phi = \{(q, [p]) \in PT^*M \text{ tels que } \exists x \in N \text{ tel que } q = \phi(x) \text{ et } p \circ D\phi = 0\}.$$

Ici $[p]$ désigne la classe projective du covecteur p, de sorte que $(q, [p])$ correspond bien à un élément de contact.

Un élément de contact $(q, [p])$ est dans L_ϕ si et seulement si son point base q est dans l'image de ϕ et si de plus l'image de la différentielle de ϕ en x antécédent de q est incluse dans l'hyperplan tangent à M en q spécifié par $[p]$. Cette dernière condition impose que q soit une valeur critique de ϕ. Ainsi, par construction, le front $\pi(L_\phi)$ s'identifie au contour de ϕ.

Cette sous-variété L_ϕ s'interprète naturellement en termes de *réduction de contact* (voir 2.2.9). Soit en effet $G \subset N \times M$ le graphe de ϕ. Le point $x \in N$ est critique pour ϕ si et seulement si l'espace tangent au graphe G en $(x, \phi(x))$ n'est pas transverse aux fibres de la projection $N \times M \to M$. Cette situation arrive si et seulement si cet espace tangent est inclus dans un hyperplan de $T_{(x,\phi(x))}(N \times M)$ contenant aussi l'espace tangent à la fibre de la projection. Au-dessus d'un tel point du graphe, le relevé legendrien $\mathcal{L}_G$ de G dans $PT^*(N \times M)$ intersecte donc l'ensemble $\mathcal{C}$ des éléments de contact de $N \times M$ contenant l'espace tangent aux fibres. Or il existe une application naturelle R de $\mathcal{C}$ vers PT^*M. On peut montrer (c'est une situation analogue à celle de 2.2.9) que si une legendrienne $\mathcal{L}$ de $PT^*(N \times M)$ est transverse à $\mathcal{C}$, alors son image $R(\mathcal{C} \cap \mathcal{L})$ est une sous-variété legendrienne immergée de PT^*M (et même plongée, quitte à perturber $\mathcal{L}$). L'ensemble L_ϕ défini ci-dessus n'est autre que $R(\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_G)$.

En général, L_ϕ n'est pas lisse. Mais [**7**, théorème A] implique que génériquement L_ϕ est une sous-variété legendrienne plongée dans PT^*M. D'après la discussion précédente, il suffit de montrer que l'*on peut réaliser la condition de transversalité en restant dans la classe des relevés legendriens de graphes dans $PT^*(N \times M)$.*

A aucun moment ce théorème A n'affirme quoi que ce soit sur la position relative de la variété réduite $R(\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_G)$ par rapport aux fibres de $\pi : PT^*M \to M$. En fait la variété réduite n'a pas de raison de se trouver en position générale vis-à-vis de cette projection. Pour bien saisir cette subtilité, il faut considérer l'exemple (local) du parapluie de Whitney paramétré : Soit N un disque ouvert de dimension 2, et $\phi : N \to \mathbb{R}^3$ la paramétrisation du parapluie de Whitney. L'ensemble L_ϕ est bien une legendrienne plongée dans $PT^*\mathbb{R}^3$ (hors du point singulier, ϕ est une immersion

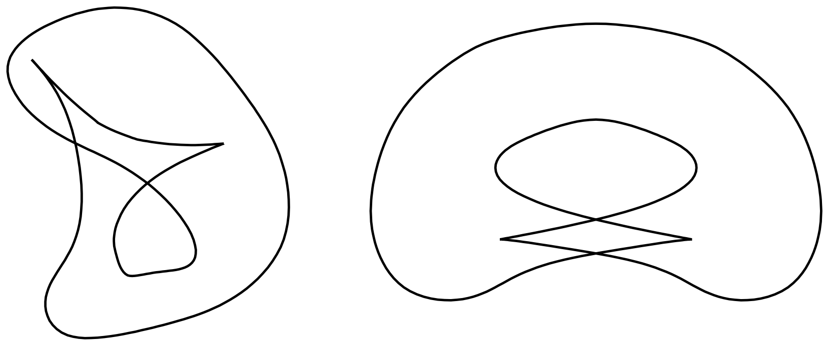


FIG. 4.1. Deux contours de tores, ou de bouteilles de Klein.

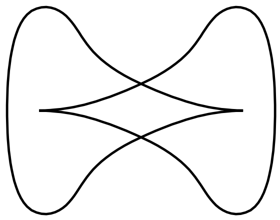


FIG. 4.2. Le contour d'une sphère.

et au-dessus de ce domaine, L_ϕ est le relevé legendrien de cette immersion). Au-dessus du point singulier, il y a par contre tout un P^1 correspondant aux éléments de contact contenant l'image (ici de dimension 1) de la différentielle. Le parapluie de Whitney *n'est pas* une singularité typique des fronts d'onde dans $\mathbb{R}^3$, et une légère perturbation[2] de L_ϕ produit une approximation du parapluie par un assemblage de queues d'aronde. Le fibré conormal du parapluie de Whitney est une lagrangienne horriblement singulière dans $T^*\mathbb{R}^3$. Mais les singularités se trouvent sur la section nulle. Après projectivisation, on obtient un L_ϕ lisse.

Il existe une grande variété de fronts réalisables comme des contours. Par exemple le front à gauche de la figure 4.1 peut se réaliser comme, au choix, le contour d'une bouteille de Klein immergée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ou d'un tore immergé dans le même espace. Le front à droite de la figure 4.1 peut lui aussi se réaliser comme contour d'immersions des mêmes objets dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, mais c'est plus délicat à voir dans le cas du tore. Le front de la figure 4.2 provient d'une application de la sphère S^2 dans le plan, mais n'est pas le contour d'une sphère immergée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. La figure 4.4 est une perturbation du contour d'une célèbre immersion de P^2 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

4.1.4. Le théorème principal de [7]**.** Il s'agit d'un résultat dans l'esprit du principe d'Arnold 3.2.2 : La propriété pour un front d'onde de l'espace projectif réel d'être un contour est stable par isotopie legendrienne : Soit P l'espace projectif réel de dimension m. Etant donné une variété compacte N, une application différentiable

[2]Qui ne peut être le relevé d'une légère perturbation de ϕ.

$\phi : N \to P$, et une legendrienne $L \subset PT^*P$ Legendre-isotope à L_ϕ, il existe une variété compacte $\mathcal{N}$ et une application $\Phi : \mathcal{N} \to P^m$ telle que $L = L_\Phi$.

Dans ce théorème, *toutes les variétés sources sont compactes*[3]. La preuve est constructive et permet de contrôler la topologie de $\mathcal{N}$. La variété but est restreinte à l'espace projectif réel, en raison d'un jeu de ping-pong avec la dualité projective, qui intervient de manière cruciale à un certain point de la preuve. On peut imaginer une généralisation à des variétés buts quelconques[4], mais en contrepartie, on perdra l'aspect très naturel et surtout très géométrique de la construction.

4.1.5. L'image d'une fibre. La preuve est enrobage technique de ce qui se passe dans le cas très particulier où N *est réduite à un point*, où ϕ est l'inclusion de ce point dans P, et où de plus L n'est qu'une *petite* déformation de L_N.

Dans les notations de 2.2.10.4, $\pi^\vee(L_N)$ est un hyperplan dans $P^\vee$. Si elle est suffisamment petite, la déformation L de L_N restera transverse aux fibres de $\pi^\vee$, $\pi^\vee(L)$ sera une hypersurface lisse de $P^\vee$, et donc L s'identifiera avec L_Φ, où $\Phi : \mathcal{N} \equiv L \to P^\vee$ est la restriction de $\pi^\vee$ à L (l'identification d'Arnold 2.2.10.4 entre PT^*P et $PT^*P^\vee$ est invoquée implicitement ici).

On a ainsi bien réalisé L comme un L_Φ, mais avec une application Φ qui ne tombe pas dans le bon espace, à savoir $P^\vee$ au lieu de P. Je montre dans [**7**] comment retomber dans l'espace voulu. Le ping-pong avec la dualité projective évoqué plus haut est ici. L'hypothèse de petitesse de la déformation s'évacue avec des arguments standard déjà présents dans toutes les autres approches des familles génératrices.

[3]A la différence du théorème de Chekanov où les fonctions sont définies sur des variétés ouvertes et doivent être contrôlées à l'infini.

[4]Bien que pour cela il reste des difficultés techniques que je n'ai pas encore traitées.

4.2. Familles génératrices et géométrie extrinsèque des sous-variétés et des fronts d'onde

Dans cette section, je passe brièvement en revue les articles [**3, 4, 5**] issus de ma thèse [**0**], qui ont en commun de faire intervenir la géométrie extrinsèque des fronts d'onde.

4.2.1. Diamètres. Comme mentionné précédemment, les calculs de [**5**] et le théorème de Chekanov peuvent a posteriori s'interpréter comme une version locale du théorème détaillé dans la section précédente. Outre cela, [**5**] contient des variations sur le thème de la dualité "de l'hodographe" (double fibration de 2.2.10.3, qui sera aussi à l'honneur dans la suite, voir 4.3.4).

Cette identification entre $ST^*\mathbb{R}^n$ et $J^1(S^{n-1}, \mathbb{R})$ permet de voir T^*S^{n-1} comme l'espace des droites affines orientées de $\mathbb{R}^n$ (voir les formules de 2.2.10.3). Etant donné une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, la sphérisation de son cotangent est une legendrienne dans $ST^*\mathbb{R}^n$, dont la projection dans T^*S^{n-1}, qui est une sous-variété lagrangienne immergée, s'interprète comme l'ensemble des droites normales à la sous-variété initiale. L'étude des auto-intersections de cette lagrangienne conduit naturellement à des estimations sur le nombre de droites doublement normales ("diamètres") à une sous-variété ou un front d'onde de l'espace euclidien. Les estimations de [**5**, th. 11] sont moins perfectionnées que celle obtenues depuis par Pushkar [**Pu2**].

4.2.2. Inégalités de Morse pour les fronts et applications. Etant donné une sous-variété compacte M immergée dans $\mathbb{R}^n$ et une famille d'hyperplans parallèles, ou plus généralement d'hypersurfaces de niveau d'une fonction, la théorie de Morse traditionnelle donne une estimation du nombre de points de tangence entres les hypersurfaces et la variété compacte M (cette observation est aussi le point départ de 4.4). Je montre dans [**5**] comment une manipulation des familles génératrices permet de généraliser ces estimations de Morse aux fronts d'onde de sous-variétés legendriennes legendre-isotopes au relevé legendrien de M (on peut parler de tangence à une front d'onde générique, qui est une hypersurface a priori singulière mais possédant néanmoins un plan tangent bien défini en chaque point).

Par exemple *une legendrienne de $ST^*\mathbb{R}^n$ ou de $PT^*\mathbb{R}^n$ dont le front d'onde est transverse à tous les hyperplans orthogonaux à une direction donnée n'est jamais legendre-isotope au relevé legendrien*[5] *d'une immersion.*

Ce critère peut être utilisé pour distinguer des classes d'isotopies legendriennes (voir une application en 4.3.6 et dans [**2**]).

Une version de ce critère où $\mathbb{R}^n$ est remplacé par le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ permet de construire l'exemple suivant [**0**, chap. 1][6], qui illustre bien la problématique de la classification des nœuds legendriens, (voir 3.3) : Considérons le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, et soit $L \subset T^3 = ST^*T^2$ la sphérisation du conormal de l'un des facteurs $S^1 \subset T^2$.

[5] Attention à la convention expliquée en 2.2.4.

[6] Construction non-publiée ailleurs que dans ma thèse [**0**], car très proche de l'idée de [**Tr**].

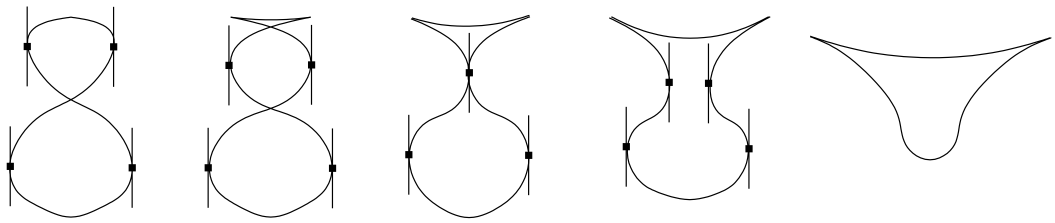


FIG. 4.3. Pour faire disparaître les tangences entre une immersion et les niveaux d'une fonction (ici représentés par la direction verticale) par une déformation parmi les fronts, il faut nécessairement passer par une autotangence (i.e. changer le type d'isotopie legendrienne du nœud legendrien correspondant dans $PT^*\mathbb{R}^2$.

Notons L^+ et L^- les deux composantes connexes de L. Elles sont envoyées l'une sur l'autre par le contactomorphisme "qui renverse la coorientation". Ce contactomorphisme est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes, mais pas parmi les contactomorphismes[7]).

Les inégalités de type Morse pour les fronts permettent de montrer que L^+ *et* L^- *ne sont pas legendriennement isotopes dans* $T^3 = ST^*T^2$, *bien que topologiquement isotopes en tant que nœuds muni d'une trivialisation du fibré normal (pour la trivialisation induite par la structure de contact). On vérifie par ailleurs que l'on peut joindre* L^+ *et* L^- *parmi les immersions legendriennes.* L^+ et L^- ont donc les mêmes invariants classiques, au sens de 3.3.

4.2.3. Géométrie des courbes planes. Ces ingrédients (double fibration, tangence avec des hyperplans, diamètres,...) sont aussi ceux de [**3**], dont l'idée essentielle est la suivante : Etant donné une immersion générique du cercle dans le plan, une formule classique (due à F. Fabricius-Bjerre et B. Halpern [**FB, Ha**]) relie le nombre de droites doublement tangentes à cette immersion, son indice de Whitney, le nombre de ses points doubles et celui de ses points d'inflexion (comptés avec des signes adéquats).

Je montre dans [**3**] comment calculer l'invariant J^+ d'Arnold (une version de l'invariant de Bennequin) du relevé legendrien de cette courbe plane en fonction de ces mêmes ingrédients géométriques, et ce de plusieurs manières différentes. La formule de Fabricius-Bjerre Halpern est obtenue en identifiant deux de ces écritures de J^+.

4.2.4. Variétés de Hadamard. Remarquons aussi que, d'après [**4**], beaucoup des conséquences géométriques de la théorie des familles génératrices se généralisent aux sous-variétés et aux fronts d'onde des variétés de Hadamard (variétés de courbure négative simplement connexes). En effet, on trouve dans [**4**] un difféomorphisme explicite entre le fibré tangent unitaire d'une variété de Hadamard de dimension n

[7] En fait il change le signe de la forme de contact standard.

et $J^1(S^{n-1}, \mathbb{R}) \equiv ST^*\mathbb{R}^n$, qui a la propriété de conjuguer les formes de contact standard de ces deux espaces.

Rappelons que le champ de Reeb de la forme de contact standard du fibré tangent unitaire d'une variété induit le flot géodésique. En particulier, *l'espace des géodésiques orientées d'une variété de Hadamard* de dimension n est une variété lisse, difféomorphe à la variété des droites orientées de l'espace euclidien, c'est à dire T^*S^{n-1}. Ces quotients étant obtenus par réduction symplectique, ils sont chacun munis d'une structure symplectique naturelle. Ce qui précède implique qu'*ils ne sont pas exotiques*.

4.3. Coexistence globale de singularités

De cette thématique relèvent [**2**] ainsi que [**8**], travail en commun avec Petr Pushkar, où nous résolvons le problème [**Ar0**, 1995-10] posé par Arnold.

4.3.1. Le résultat principal de [8]. Il s'agit du théorème suivant : *Il existe des classes d'isotopies legendriennes dans $ST^*\mathbb{R}^n$ dont tous les représentants ont un front singulier, mais telles que ces singularités soient éliminables par déformation parmi les* immersions *legendriennes.* Cette présence obligatoire de singularités est un invariant d'isotopie legendrienne non-trivial.

Un résultat équivalent a été obtenu[8] via une approche différente par Misha Entov [**En1**] [**En2**]. Je me limite ci-dessous à la discussion du cas $n = 2$, afin de préserver la simplicité des explications. Le généralisation pour n quelconque n'est qu'un enrobage technique des idées "visuelles" de le dimension 2 (mis à part la proposition C de [**8**], qui est propre au cas $n \geq 3$). Quant aux résultats de [**2**], il sont spécifiques à cette dimension.

4.3.2. Réalisabilité. Il est démontré dans [**Sh0**], [**CGM**] et [**2**], qu'étant donné une surface orientable M, tout type topologique de nœud dans ST^*M peut être réalisé comme relevé legendrien d'une courbe immergée *coorientée*[9] dans M.

De plus un résultat de [**2**] montre que si l'on peut éliminer les singularités du front par déformation parmi les immersion legendriennes, *alors elles sont éliminables par isotopie legendrienne, modulo une opération de stabilisation, qui ne change pas le type topologique du nœud ni le type d'immersion legendrienne* (mais qui change l'auto-enlacement du nœud legendrien, et donc sa classe d'isotopie legendrienne). D'après [**8**], cette opération de stabilisation est en général inévitable.

4.3.3. Structure de la preuve du résultat principal de [8]. La preuve se divise en deux grandes étapes. La première exploite la structure de double fibration legendrienne (voir 2.2.10.3) pour réduire le problème à une question portant sur les familles génératrices. La seconde, qui est d'un intérêt propre, consiste en la construction explicite de familles génératrices dont la variété auxiliaire est compacte et telles que la legendrienne engendrée soit *connexe.*

Soit W une variété compacte, et $F : S^1 \times W \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la sous-variété legendrienne associée $L_F \subset J^1(S^1, \mathbb{R})$ soit connexe. La topologie de W impose (inégalités de Morse) que, pour chaque $t \in S^1$, L_F intersecte la fibre $\mathbb{R} \times T_t^*S^1$ un grand nombre de fois (comptées avec multiplicité). Pour assurer que le front de L_F dans $J^0(S^1, \mathbb{R})$ soit bien l'image d'une courbe connexe, il est clair qu'un grand nombre de points de rebroussement vont être nécessaires. D'après le théorème de Chekanov (voir 3.2.1) la même conclusion reste valable pour le front de toute legendrienne Legendre-isotope à L_F.

[8] concomitamment et indépendamment de [**8bis**], note aux CRAS dont [**8**] contient une version détaillée augmentée de constructions supplémentaires.

[9] Attention à la convention de 2.2.4.

4.3.4. Modulo la question de la connexité de L_F, il est donc aisé de construire des classes d'isotopies legendriennes dont tous les représentants ont un front dans $J^0(S^1,\mathbb{R})$ très singulier. Si l'on se souvient de la double fibration de 2.2.10.3

$$\mathbb{R}^2 \overset{\pi}{\leftarrow}: ST^*\mathbb{R}^2 \equiv J^1(S^1,\mathbb{R}) \overset{\sigma}{\rightarrow} J^0(S^1,\mathbb{R}),$$

on voit que ces classes d'isotopie legendriennes auront des représentants tous dotés d'un front (dans $\mathbb{R}^2$ cette fois-ci) riche en inflexions.

Il existe une fonction localement constante et *surjective* à valeurs entières dans $\{0,\ldots,dim(W)\}$ naturellement définie sur le complémentaire dans L_F du lieu (qui génériquement est de codimension 1, i.e. composé de points isolés) des tangences avec les fibres de σ. Il s'agit de l'indice de Morse du point critique de $F(t,\cdot)$ qui paramétrise le point de L_F considéré (chaque branche du diagramme de Cerf privé des points de rebroussement est naturellement décorée par l'indice de Morse du point critique correspondant à la valeur critique suivie le long de cette branche). Cette fonction est surjective à cause de l'hypothèse de connexité.

Il existe par ailleurs une fonction localement constante naturellement définie sur le complémentaire R dans L_F du lieu des tangences avec les fibres de π et de σ : La projection π immerge chaque composante connexe de R de manière convexe ou concave par rapport à la coorientation de $\pi(L_F)$. La fonction cherchée prendra pour valeur 0 sur les parties convexes, et 1 sur les parties concaves. Pour F générique, les segments convexes et concaves alternent le long de $\pi(L_F)$, et la valeur de cette fonction "saute" au passage de chaque rebroussement et de chaque inflexion du front.

Le point clef est qu'une étude locale montre qu'*au passage d'une inflexion, ces deux fonctions ont le même saut.* Or, au passage d'un rebroussement, seule la seconde varie. Ainsi, dès que W est de dimension supérieure ou égale à 2, des rebroussements sont inévitables dans le $\pi(L_F)$ (pour F générique). Tout ceci peut s'interpréter en termes cohomologiques, et c'est ce point de vue qui conduit à une preuve valable en toutes dimensions.

4.3.5. Il reste donc à trouver des variétés W de dimension 2 ou plus et des fonctions $F : S^1 \times W \to \mathbb{R}$ telles que les sous-variétés legendriennes L_F soient *connexes*. Dans [**8**] nous donnons plusieurs constructions indépendantes. L'une d'elle est très visuelle et peut être expliquée dans les termes suivants :

Nous avons vu en 4.1 comment associer à une application différentiable générique $\phi : W \to \mathbb{R}^2$ une legendrienne L_ϕ dans $PT^*\mathbb{R}^2$. Soit $\tilde{L}_\phi$ la pré-image de L_ϕ par le revêtement double $ST^*\mathbb{R}^2 \to PT^*\mathbb{R}^2$. Un calcul montre que $\tilde{L}_\phi$, considérée comme sous-variété legendrienne de $J^1(S^1,\mathbb{R})$, s'identifie à L_F, où $F : S^1 \times W \to \mathbb{R}$ est la famille génératrice définie par

$$F(\theta,w) = \langle \theta, \phi(w) \rangle.$$

Pour résoudre la question posée, on peut donc chercher une variété W de dimension au moins 2, ainsi qu'une application $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ telle que $\tilde{L}_\phi$ soit connexe.

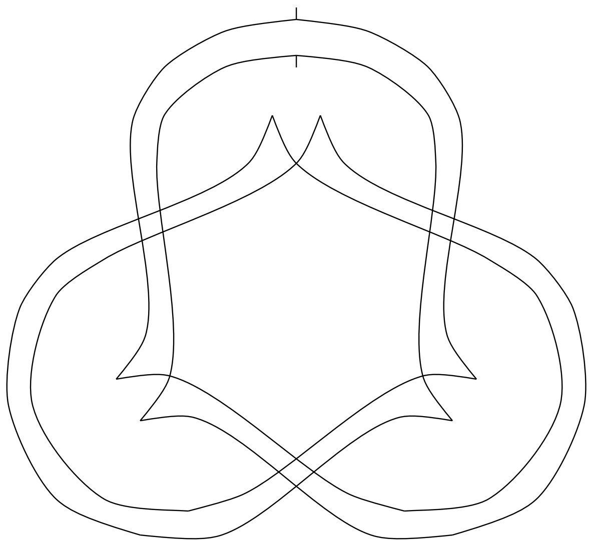


FIG. 4.4. Légère perturbation du contour apparent de la surface de Boy.

Il se trouve qu'une telle application est décrite par Boy [**Bo**] : considérons l'immersion de Boy de l'espace projectif réel de dimension 2, noté ici W, dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\phi : W \to \mathbb{R}^2$ la restriction à W de la projection sur le plan selon l'axe de symétrie de cette immersion. Le contour apparent (dessiné par Boy en 1903) possède lui aussi cette symétrie d'ordre 3, et en poussant légèrement L_ϕ par le flot géodésique de $\mathbb{R}^2$, on obtient une legendrienne dont le front est dessiné sur la figure 4.4, qui en particulier est bien connexe.

On peut construire beaucoup d'autres exemples du même style à l'aide d'immersions de surfaces non-orientable dans $\mathbb{R}^3$. Il existe [**Mi**] une très belle application ψ de P^2 dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\tilde{L}_\psi$ est connexe et dont le front $\pi(\tilde{L}_\psi)$ possède le nombre minimal de rebroussements possible[10] (voir aussi [**Hae**] [**Le**]).

4.3.6. Un autre résultat sur la nécessité de singularités. Outre les résultats de réalisabilité et d'élimination des singularités mentionnés plus haut en 4.3.2, [**2**] contient un résultat sur la nécessité de singularités dans le contexte *non coorienté*.

La projectivisation du conormal d'une courbe immergée dans le plan n'est jamais contenue dans une boule plongée dans $PT^*\mathbb{R}^2$.

"Etre contenu dans une boule plongée" est une propriété de la classe d'isotopie toute entière. Ainsi tous les représentants d'une telle classe devront avoir un front singulier.

Bien entendu, cette approche n'est intéressante que s'il n'y a pas d'obstruction à éliminer les singularités par déformation parmi les immersions legendriennes. De

[10] L'image $\pi(\tilde{L}_\psi)$ possède un rebroussement, mais est revêtue deux fois par $\tilde{L}_\psi$, de sorte que $\pi_{|\tilde{L}_\psi}$ possède deux singularités (qui seront donc inamovibles par isotopie legendrienne, d'après la preuve du théorème principal).

nombreux exemples de ce type existent, le plus simple étant donné par la figure 4.3, qui, lue à l'envers, explique comment éliminer les deux rebroussements des "lèvres".

Ce résultat est d'une nature très différente de celui obtenu dans le cas coorienté [**8**]. J'utilise pour le montrer le fait que $PT^*\mathbb{R}^2$ est une variété de contact *tendue* au sens de 3.3.2 : toute boule plongée est contactomorphe à une boule plongée dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ce point repose sur les travaux fondamentaux de Eliashberg et Giroux [**Gi0, Gi1**]. On peut en déduire que toute boule plongée dans $PT^*\mathbb{R}^2$ se laisse isotoper à l'intérieur d'une boule arbitrairement petite, disons un voisinage d'un élément de contact fixé.

Une legendrienne contenue dans un tel voisinage possède un front dont les tangentes sont très proche de l'élément de contact fixé. Ce front sera donc transverse aux niveaux d'une fonction "hauteur" bien choisie. D'après [**5**] (voir 4.2.2), ceci est impossible si la legendrienne de départ est le relevé d'une immersion.

Pourquoi ce raisonnement n'est-il pas généralisable au contexte coorienté ? C'est qu'alors "avoir un front immergé" est une propriété différente de "être le relevé legendrien d'une immersion". Le relevé d'une immersion du cercle possède deux composantes connexes. Les inégalités de 4.2.2 portent bien sur l'union de ces deux composantes. Un tel entrelacs legendrien n'est donc jamais plongé dans une boule.

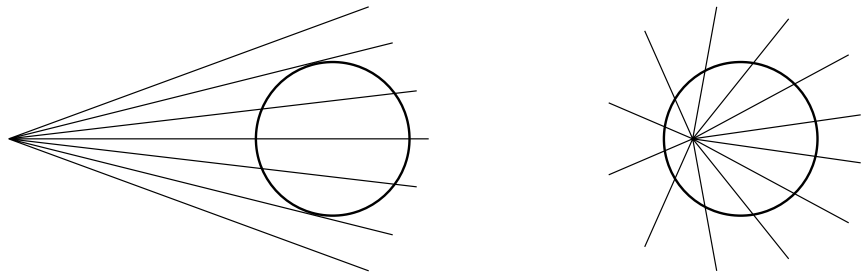


FIG. 4.5. Tangences entre une variété compacte et une famille à un paramètre d'hypersurfaces.

4.4. Balayages de variétés compactes

Il s'agit d'un travail [**10**] élaboré en commun avec Petr Pushkar, où l'on généralise l'inégalité de Morse totale bornant inférieurement le nombre de points critiques d'une fonction lisse sur une variété compacte. Il ne s'agit pas de géométrie de contact *stricto-sensu*, les méthodes employées se limitant au calcul différentiel élémentaire et à la théorie de Morse classique. Néanmoins, nous verrons qu'il s'agit bien d'une manifestation originale du principe d'Arnold (3.2.2).

4.4.1. Toute fonction sur une variété compacte M peut se réaliser comme une "fonction hauteur", c'est-à-dire comme projection sur l'un des axes de coordonnée (l'axe "vertical") pour un certain plongement de M dans un espace Euclidien $\mathbb{R}^n$. Les points critiques de f correspondent aux points de tangence entre M et les hyperplans "horizontaux". L'inégalité totale de Morse est donc une estimation du nombre de tangences entre une variété compacte et les membres d'une famille d'hyperplans parallèles.

On peut se demander ce qu'il advient du nombre de telles tangences lorsqu'on déforme cette famille d'hyperplans en une famille à un paramètre d'hypersurfaces. A priori une telle famille n'a aucune raison d'être identifiable avec les niveaux d'une fonction.

Revenons un instant sur la famille des hyperplans parallèles. Ils s'intersectent tous à l'infini autour d'un sous-espace de codimension 2. Si l'on ramène cet "axe" dans le domaine affine, mais loin de M, la famille d'hyperplans se comporte comme les niveaux d'une fonction au voisinage de M, et l'on conserve une inégalité de type Morse pour le nombre de tangences (voir fig. 4.5). Si l'on rapproche cet axe suffisamment près de M pour qu'il intersecte cette dernière, alors on peut espérer diminuer le nombre de tangences.

4.4.2. Balayages. Nous allons voir comment interpréter cette situation dans le sens du principe d'Arnold (3.2.2). Un *balayage* est une famille lisse d'hypersurfaces non-singulières, paramétrée par une angle $t \in S^1$. On représentera chaque hypersurface de manière implicite par une équation $\{x \in \mathbb{R}^n | h_t(x) = 0\}$, et on utilisera cette fonction $h\ : \mathbb{R}^n \times S^1 \to \mathbb{R}$ pour désigner le balayage. Un balayage est dit *standard*

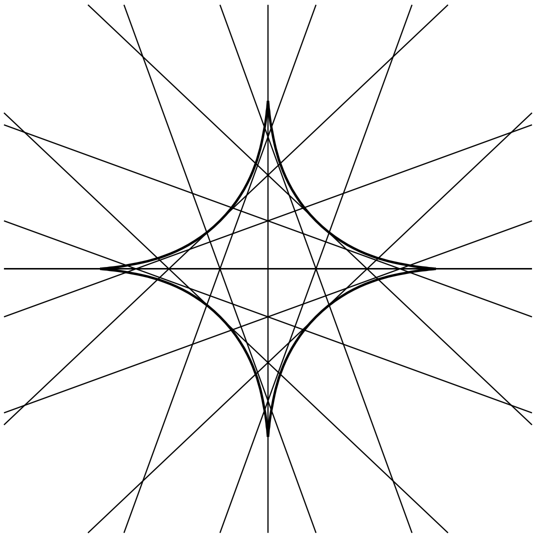


FIG. 4.6. Un balayage typique et son enveloppe.

par rapport à M si de plus h_0 est positive sur M et h_π négative sur M. Cette condition assure qu'un balayage standard balaye M *deux fois*. La famille d'hyperplans de la fig 4.5, gauche, ou plus généralement les niveaux d'une fonction hauteur, peuvent se refermer en un balayage standard. Dans ce cas le nombre de tangences (comptées avec multiplicités) est au moins égal à deux fois le nombre de Morse de M.

Soit L_M le relevé legendrien de M dans $ST^*\mathbb{R}^n$ (voir 2.2.4). A un balayage h, on peut associer un sous-ensemble $L_h \subset ST^*\mathbb{R}^n$ par la construction suivante :

$$L_h = \{(x,[p]) \in ST^*\mathbb{R}^n \text{ tels que } \exists t \in S^1 \text{ tel que } h(x,t) = 0, \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = 0, p = \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\}.$$

Ici, $[p]$ désigne la classe du covecteur p modulo homothéties positives. Cet ensemble n'est pas nécessairement lisse, bien qu'il le soit pour un h générique (c'est alors une sous-variété legendrienne). Par ailleurs, cet ensemble n'est pas nécessairement compact. En effet, son front $\pi(L_h)$ (notations de 2.2.3) n'est autre que

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \exists t \in S^1 \text{ tel que } h(x,t) = 0, \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = 0\},$$

c'est-à-dire *l'enveloppe*, au sens traditionnel du terme [**Au**], de la famille d'hypersurfaces implicitement définie par h.

Le théorème principal de [**10**] est une manifestation du principe d'Arnold : Soit M une variété compacte. *Si l'on déforme un balayage standard par rapport à M parmi les balayages de sorte que la legendrienne associée au balayage n'intersecte L_M à aucun moment de la déformation, alors une inégalité de type Morse reste valide :* le nombre de tangences (comptées avec multiplicité) entre M et les feuilles du balayage est supérieur au double de la somme des nombres de Betti de M.

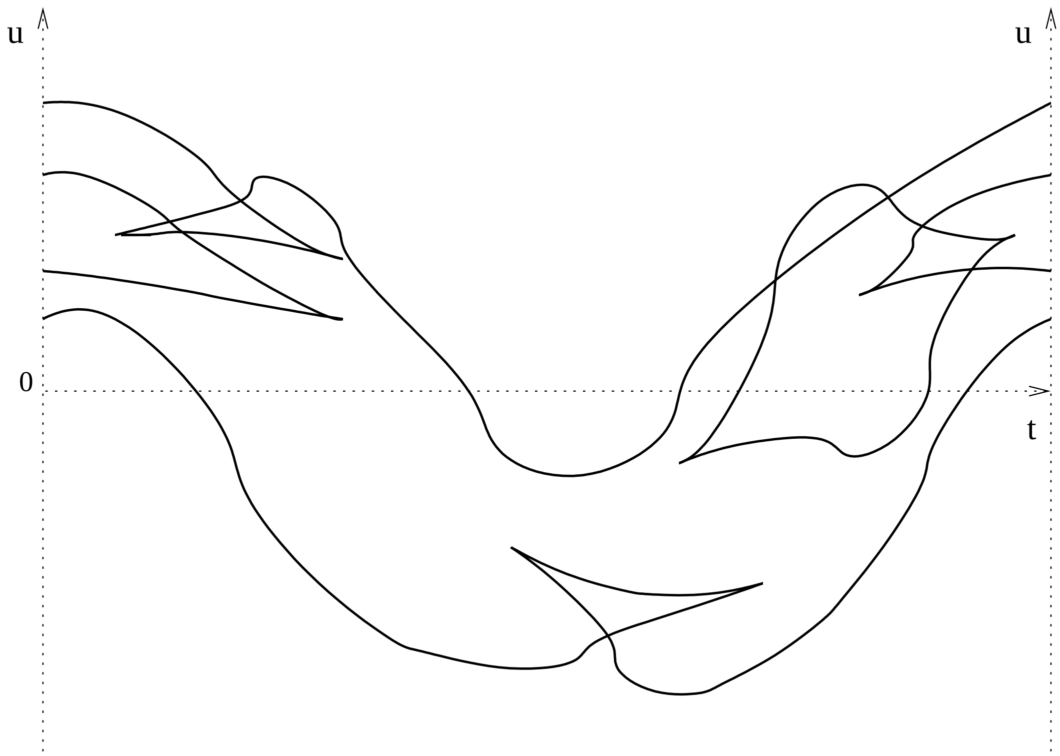


FIG. 4.7. Le front de l_h lorsque h est un balayage standard.

La preuve ne fait intervenir que le calcul différentiel et la théorie de Morse traditionnelle. Le vocabulaire "contact" n'intervient que pour interpréter l'hypothèse du théorème, qui d'ailleurs se "visualise" dans $\mathbb{R}^n$ en disant que, *à aucun moment, l'enveloppe de la famille d'hyperplans n'est tangente à M.*

La conclusion du théorème ressemble à celle du théorème de Givental [**Giv**] (voir 3.2.3). Les tangences dont nous cherchons à estimer le nombre sont en correspondance bi-univoque avec les intersections entre L_M et l'union de tous les relevés legendriens des hypersurfaces qui composent le balayage, coorientées par le gradient de h.

Cette même conclusion peut étrangement être interprétée comme une estimation du nombre d'intersections entre deux fronts dans $J^0(S^1, \mathbb{R})$. En effet, étant donné un balayage h, les tangences que nous recherchons correspondent aux couples $(q, t) \in M \times S^1$ tels que q est un point critique de la fonction $h(t, \cdot) \; : M \to \mathbb{R}$ dont la valeur critique est 0. Autrement dit, nous voulons compter les intersections entre la section nulle de $J^0(S^1, \mathbb{R})$ et le front de la sous-variété $l_h \subset J^1(S^1, \mathbb{R})$ définie par la fonction h, considérée comme une famille génératrice (voir 2.2.8) dont la variété auxiliaire serait M. La figure 4.7 représente ce front dans le cas d'un balayage standard typique. Je ne sais pas transformer cette remarque (qui pourtant évoque certaines considérations de [**Giv**] et de [**EG**]) en une preuve alternative du théorème.

4.5. Inégalités de type Bennequin

L'article [**6**] traite du problème de la réalisabilité des invariants classiques déjà évoqué au paragraphe 3.3.4. *Avertissement :* la manipulation des invariants dont il est question ci-dessous (polynômes des nœuds, auto-enlacement, indice de Maslov) nécessite de porter une attention particulière aux questions d'orientation et de normalisation, ce dont je vais me dispenser dans cette exposition informelle. Les choix de [**6**] sont corrects, mais différents de ceux de [**Mo, Ng2, Rut**].

4.5.1. L'inégalité de Bennequin et sa postérité, première partie. En 1983, Bennequin [**Be**] a montré que tous les types d'isotopie régulière ne sont pas réalisables par des nœuds legendriens dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Plus précisément, il montre que l'indice de Maslov μ et l'auto-enlacement tb avec la direction de la projection $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to T^*M$ sont contraints par l'inégalité

$$tb + |\mu| < 2g_3,$$

où g_3 est un invariant topologique du nœud considéré, le minimum des genres des surfaces lisses orientables plongées dans $\mathbb{R}^3$ dont le bord est le nœud.

Par exemple, pour un nœud trivial ($g_3 = 0$), tb vaut au plus -1. Cette inégalité est utilisée par Bennequin pour mettre en évidence une structure de contact exotique sur $\mathbb{R}^3$. En 1985, peu après la découverte des invariants polynômiaux des nœuds (le polynôme de Jones, et ses cousins le polynôme HOMFLY et le polynôme de Kauffman), Morton [**Mo**] et Franks-Williams [**FW**] montrent une inégalité du même type :

$$tb + |\mu| \leq e_P,$$

où e_p est un invariant topologique du nœud, le degré minimal d'une certaine variable dans le polynôme HOMFLY. Le genre g_3 est un invariant très simple à définir, mais difficile à calculer. Pour e_P, c'est le contraire : la définition est assez obscure, mais il se calcule facilement par des procédés combinatoires (topologie diagrammatique en dimension 2).

Une autre inégalité,

$$tb \leq e_Y,$$

où e_Y est le degré minimal d'une des deux variables du polynôme de Kauffman a été découverte sous des formes plus ou moins diverses par Rudolph, Fuchs-Tabachnikov, Chmutov-Goryunov-Murakami [**Ru2**],[**FT**],[**Ta1**],[**CGM**],[**Tan**]. Voir [**6**] pour un historique plus précis.

Enfin, suite à [**KM1**], Rudolph à montré [**Ru6**] l'*inégalité de Bennequin forte*

$$tb + |\mu| < 2g_4,$$

où g_4 (le genre "slice") est le minimum des genres des surfaces lisses plongées dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times [0, +\infty[$, et dont le bord est le nœud considéré dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \{0\}$. Cette dernière inégalité, conjecturée par Bennequin, implique la conjecture de Milnor sur le genre g_4 des nœuds toriques.

4.5.2. Résultats de [6]. Dans la liste des inégalités ci-dessus, celle qui fait intervenir le polynôme de Kauffman est singulière. Toutes les autres partagent avec l'inégalité originelle de Bennequin une interprétation en termes de tresses, et possèdent une version pour les nœuds transverses à la structure de contact. L'inégalité $tb \leq e_Y$ est, elle, *spécifique aux nœuds legendriens.* L'absence du facteur $|\mu|$ dans le terme de gauche empêche d'en déduire une conséquence pour les nœuds transverses ou pour les tresses, selon le chemin bien balisé de [**Be**].

Dans [**6**], je montre comment l'inégalité $tb \leq e_Y$ découle de l'inégalité (mieux comprise) $tb + |\mu| \leq e_P$, appliquée non pas au nœud lui-même, mais à toute une famille de nœuds obtenus en découpant certains croisements de son front dans $J^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Le point clef est une formule due à François Jaeger [**Kau**] qui exprime le polynôme de Kauffman d'un nœud comme une "somme d'états" portant sur des nœuds obtenus en découpant un certain diagramme du nœud considéré.

Le front dans $J^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ d'un nœud legendrien générique dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ détermine complètement le nœud en question, et peut s'interpréter comme une sorte de diagramme de nœud. On obtient d'ailleurs un diagramme au sens traditionnel du terme en faisant subir à ce front une petite perturbation, appelée morsification dans [**6**]. Grâce à cette gymnastique, on peut exprimer les quantités qui apparaissent dans la somme de Jaeger uniquement en fonction des invariants HOMFLY, tb et μ de nœuds dont les fronts sont obtenus en découpant celui du nœud initial en certains croisements. Un petit miracle calculatoire se produit alors, et l'inégalité cherchée apparaît tout naturellement.

4.5.3. Mathématiques expérimentales. L'autre résultat de [**6**] est de nature expérimentale. Il est naturel de vouloir comparer les 3 inégalités $tb + |\mu| < 2g_4$, $tb + |\mu| \leq e_P$ et $tb \leq e_Y$, la première étant un résultat difficile, alors que la seconde et la troisième sont au contraire élémentaires. La conclusion à tirer de ces exemples est qu'*aucune d'entre elle n'est optimale* (voir [**6**] pour un historique des autres résultats de non-optimalité [**Ep**], [**Ru3**], [**Kan**] [**EH**], [**Ng2**]).

Il se trouve que, lorsqu'on considère les tables présentant les invariants des nœuds les plus simples, on observe que le seconde est toujours plus forte que la première (i.e , $e_P < 2g_4$). En cherchant mieux, on trouve un contre-exemple, mais parmi les nœuds ne se laissant pas représenter par un diagramme ayant moins de 10 croisements. On peut en fait construire des exemples de nœuds tels que la différence $e_P - 2g_4$ soit *arbitrairement négative ou positive.* En ce sens, les deux premières inégalités sont indépendantes.

Il est clair que $g_3 \geq g_4$. On pourrait donc imaginer que $e_P < 2g_3$. Morton avait posé la question de la validité de cette inégalité dès 1986 [**Mo**]. A. Stoimenow l'a vérifiée pour tous les nœuds possédant un diagramme ayant moins de 17 croisements, et a trouvé un contre-exemple possédant un diagramme avec 21 croisements [**St1**][**St2**].

Pour ce qui est d'estimer tb et non pas $tb + |\mu|$, la troisième inégalité semble expérimentalement plus forte. Un exploitation informatique des tables les plus fournies [**HT**] montre que parmi les nœuds possédant un diagramme ayant moins de 16 croisements (il y en plus de 60000), il existe tout de même 22 contre-exemples à l'inégalité $e_Y \leq e_P$. Aucun de ces contre-exemples ne possède de diagramme alterné, j'ai donc posé la question : *est-il vrai que $e_Y \leq e_P$ pour tous les nœuds alternés ?*[11].

Cette question est restée ouverte jusqu'en novembre 2005, date à laquelle Dan Rutherford [**Rut**] en a donné une preuve, corollaire de résultats portant sur les *décompositions des fronts d'ondes*, notion introduite par Pushkar et Chekanov [**ChP**], inspirée par la théorie des familles génératrices. La preuve de Rutherford s'appuie en outre sur une construction non triviale établie par Lenny Ng [**Ng4**] entre les nœuds alternés et les décompositions des fronts d'onde. Ce détour par la topologie de contact pour prouver un résultat relevant de la théorie des nœuds la plus traditionnelle est tout à fait remarquable.

4.5.4. Postérité de l'inégalité de Bennequin, suite. Au début de ce travail, les tables m'ont laissé un temps le fol espoir que $e_P < 2g_4$. Une telle inégalité aurait eu pour conséquence une preuve de l'inégalité de Bennequin forte et des résultats de [**KM1**], j'ai donc vite réalisé sa fausseté. Je pensais à l'époque qu'une preuve combinatoire, diagrammatique et bidimensionnelle de $tb + |\mu| < 2g_4$ était illusoire.

Une telle preuve existe pourtant aujourd'hui. Khovanov [**Kh1**] associe des groupes d'homologie (gradués) aux diagrammes des nœuds (voir aussi [**Vir2**]). Les dimensions de ces groupes sont des invariants du nœud, la caractéristique d'Euler (graduée) de cette homologie est le polynôme de Jones. Le polynôme HOMFLY vient de recevoir le même traitement [**KR**]. Rasmussen [**Ra**] montre comment extraire de l'homologie de Khovanov un invariant s, qui est un morphisme du groupe de concordance à valeurs dans $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$tb + |\mu| < s \leq 2g_4.$$

L. Ng [**Ng4**], H. Wu [**Wu**], A. Shumakovitch [**Sh1**] et O. Plamenevskaya [**Pl1**], viennent de proposer plusieurs estimations de tb et de $tb + |\mu|$ qui sont autant de variations sur ce thème. Toute cette activité autour de l'homologie de Khovanov se double de résultats analogues obtenus via l'homologie de Oszvath-Szabo (voir, par exemple, [**Pl2**]).

[11]Ni e_P, ni e_Y ne sont formellement définis dans ce texte. Leur définition précise dépend de choix de normalisation qui varient selon les auteurs classiques, et de choix d'orientation (voir [**6**]). Ce sont néanmoins des quantités facile à extraire des polynômes HOMFLY et de Kauffman.

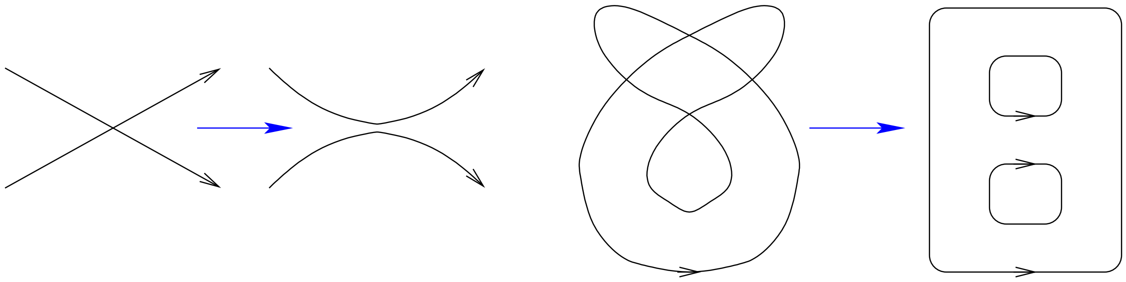


Fig. 4.8. Le procédé de lissage.

4.6. Configurations de courbes planes, et cobordisme de fronts d'onde

L'article [**9**] est une remarque suscitée par l'article [**Vir1**] de Oleg Viro. L'article [**1**] concerne une problématique similaire.

4.6.1. La problématique est la suivante : La théorie des invariants de type fini s'est popularisée essentiellement en théorie des nœuds, mais le point de vue original de Vassiliev [**Va2**] s'applique à bien d'autres contextes. On peut, par dualité d'Alexander, obtenir des informations sur les éléments génériques d'un espace fonctionnel (par exemple les nœuds dans l'espace des immersions de S^1 dans $\mathbb{R}^3$) en étudiant la topologie de l'espace fonctionnel ambiant et celle du *discriminant*, l'ensemble des objets non-génériques dans cet espace.

En suivant Arnold [**Ar3**], on peut considérer le cas de l'espace $\mathcal{F}$ des immersions de S^1 dans le plan $\mathbb{R}^2$ (le cas des applications $S^1 \to \mathbb{R}$ étant lui aussi intéressant). Une immersion est génériquement dénuée de points triples et d'auto-tangences, phénomène que l'on observe en codimension 1. Si l'on prend en compte l'orientation du cercle, on peut distinguer deux types d'auto-tangences selon que les vecteurs vitesse en ce point pointent dans la même direction (*auto-tangence positive*) ou non (*auto-tangence négative*). Soit Δ^+ (resp. Δ^-) la clôture de l'ensemble des immersions orientées ayant une auto-tangence positive (resp. négative). Soit Δ^{st} la clôture de l'ensemble des immersions ayant un point triple. Ces trois hypersurfaces singulières possèdent des coorientations naturelles. Une traversée de la strate générique de Δ^+ ou de Δ^- sera dite positive si le nombre de points doubles de l'immersion augmente après l'auto-tangence (la coorientation de Δ^{st} est plus subtile). Aux hypersurfaces singulières coorientées $\Delta^+, \Delta^-, \Delta^{st}$, Arnold associe par dualité des 1-cobords, qui s'avèrent être exacts. On obtient ainsi trois invariants de degré 1, i.e, trois fonctions J^+, J^- et St localement constantes, respectivement, sur $\mathcal{F} \setminus \Delta^+$, $\mathcal{F} \setminus \Delta^-$, $\mathcal{F} \setminus \Delta^{st}$.

Les composantes connexes de $\mathcal{F}$ sont classifiées par l'indice de Whitney [**Wh**] (noté i dans la suite). Une courbe orientée immergée dans le plan orienté hérite d'une coorientation naturelle. Le type d'isotopie legendrienne du relevé legendrien[12] correspondant dans $ST^*\mathbb{R}^2$ ne change que si l'immersion traverse Δ^+. La classification des composantes connexes de $\mathcal{F} \setminus \Delta^+$ hérite donc directement de tous les

[12] La courbe étant ici coorientée, ce relevé est connexe, d'après la convention de 2.2.4.

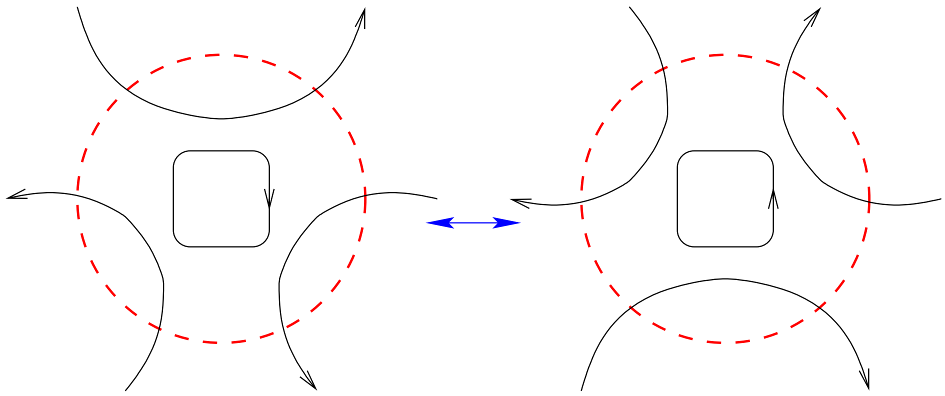


FIG. 4.9. La chirurgie triangulaire.

invariants des nœuds legendriens dans $ST^*\mathbb{R}^2$, et J^+ s'identifie à une version de l'invariant de Bennequin (voir, par exemple, [**Po**]). La classification des composantes connexes de $\mathcal{F} \setminus \Delta^{st}$ est un sujet à part que je ne considère pas ici (Cette question gagne pourtant à être connue, voir par exemple [**Ta2**], [**Kaz**], [**Kh0**]).

La classification des composantes connexes de $\mathcal{F}\setminus\Delta^-$est quant-à elle reliée à celle des entrelacs legendriens dans $ST^*\mathbb{R}^2$ par l'observation suivante. Un chemin parmi les immersions traverse Δ^- si et seulement si les deux composantes connexes des relevés legendriens dans $ST^*\mathbb{R}^2$ s'intersectent[13]. Il s'avère que l'invariant d'Arnold J^- s'interprète comme une sorte d'enlacement[14] entre ces deux composantes.

Dans [**Vir1**], Viro donne une formule permettant de calculer la valeur de J^- sur un immersion générique en fonction de la *configuration de courbes de Jordan emboîtées* (terminologie abrégée en *"configuration"* dans la suite) naturellement associée à l'immersion par le procédé de *lissage* (voir fig. 4.8).

On constate que lorsqu'une immersion traverse Δ^+, la configuration ne change pas, à isotopie du plan près. Lorsqu'on traverse Δ^{st}, la configuration peut ou non se modifier, suivant les orientations respectives des trois branches du point triple. Si c'est le cas, alors la modification prend la forme de la *chirurgie triangulaire* de la figure 4.9. Une traversée positive du discriminant "interdit" Δ^- implique quant à elle une chirurgie de la configuration associée décrite sur la figure 4.10.

4.6.2. Classification des configurations. Ainsi, à chaque composante connexe de $\mathcal{F} \setminus \Delta^-$, on peut associer une classe d'équivalence de configurations modulo isotopie du plan et chirurgie triangulaire. Dans [**9**] je pose le problème de cette classification, j'observe que les invariants i et J^- descendent en des invariants de ces classes d'équivalence de configurations. Je montre que i et J^- engendrent tous les invariants additifs pour la somme disjointe des configurations (i.e. la juxtaposition de deux configurations dans deux demi-plans complémentaires). Je montre en fait

[13] Au moment de l'auto-tangence, les deux composantes connexes n'en forment plus qu'une.

[14] Qui doit être précisément défini dans la variété non simplement connexe $ST^*\mathbb{R}$.

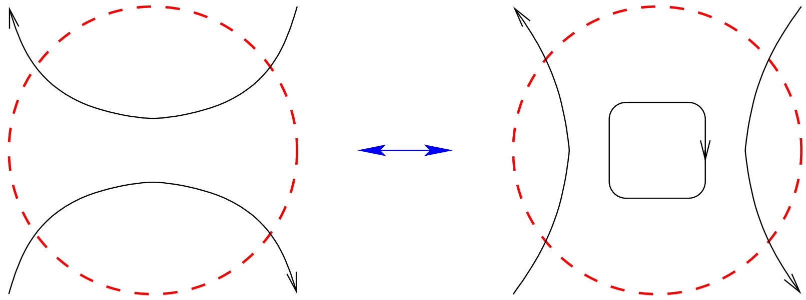


Fig. 4.10. La chirurgie interdite.

Fig. 4.11. Ces deux configurations sont-elles équivalentes ?

que *i et J^- classifient les configurations à stabilisation près.* L'opération de stabilisation consiste ici à faire la somme disjointe avec une paire de courbes de Jordan d'orientations opposées, non imbriquées.

Cette classification stable est donc remarquablement simple. La classification complète semble elle plutôt compliquée (voir par exemple la figure 4.11, pour une question à laquelle je ne sais pas répondre). Il existe une notion naturelle d'invariant de type fini dans ce contexte combinatoire, inspirée du fait que la chirurgie interdite de la figure 4.10 est une opération de dénouage : i est l'unique invariant des configurations modulo chirurgie interdite. Je montre que la situation est alors analogue à celle des nœuds legendriens décrite dans [**FT**] : *les invariants de type fini ne peuvent distinguer des configurations stablement équivalentes.*

Il existe d'autres situations où les invariants de type fini ne classifient pas. Mais la classification des configurations donne un exemple simple, une sorte de "toy model", où l'on peut observer ce phénomène. Savoir si les invariants de type fini classifient ou non les nœuds dans $\mathbb{R}^3$ est un problème ouvert. L'hypothèse de Poincaré est vraie si les invariants de type fini classifient les nœuds dans toutes les sphères d'homotopie [**Ei**].

4.6.3. Cobordismes de fronts d'onde. Il est naturel de citer ici [**1**], article qui fait apparaître une combinatoire proche de celle introduite ci-dessus et dans lequel je reprends une idée d'Arnold [**Ar3**] sur la classification des courbes planes génériques, adaptée aux courbes singulières que sont les fronts d'onde de nœuds legendriens dans $ST^*\mathbb{R}^2$.

L'idée est la suivante : affaiblir la relation d'équivalence "être dans la même composante connexe du complémentaire du discriminant", dans l'espoir d'aboutir à

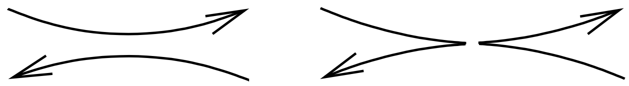


FIG. 4.12. Cobordisme élémentaire de front d'onde.

une classification "calculable", mais néanmoins non-triviale. Arnold classifie donc les immersions du cercle dans le plan modulo des "cobordismes restreints" : en plus des chemins dans le complémentaire du discriminant, on s'autorise à modifier la courbe par des chirurgies de Morse. Suivant le discriminant considéré ($\Delta^+, \Delta^-, \Delta^{St}, \Delta^- \cup \Delta^{St}$,...) on obtient des groupes ou des semi-groupes plus ou moins compliqués (la loi d'addition étant la somme disjointe), et, parfois, des invariants intéressants.

Dans [**1**], je considère le problème analogue où les courbes sont remplacées par des fronts d'onde orientés et coorientés dans le plan, et la chirurgie de Morse par le modèle local (voir Fig. 4.12) induit par *le cobordisme de nœuds legendriens* [**Va1**]. J'ai considéré deux cas pour le discriminant que les fronts doivent éviter. Le plus important est celui des auto-tangences où les coorientations des deux branches en contact coïncident. Ceci correspond à une auto-intersection du nœud legendrien sous-jacent. Un cobordisme legendrien *avec cette restriction* induit donc un *cobordisme de nœuds topologiques.*

Le résultat est plutôt négatif : on peut contourner cette restriction. Dans le langage des nœuds legendriens, le résultat, valable pour les nœuds dans une variété de contact de dimension 3 quelconque, peut se formuler ainsi :

Deux nœuds legendriens sont legendre-cobordants avec cette restriction (pas d'auto-intersection) si et seulement si ils sont legendre-cobordants (au sens traditionnel). De plus, tout cobordisme topologique entre deux nœuds legendriens legendre-cobordants peut être induit par un cobordisme legendrien restreint.

Le second discriminant que j'ai considéré est celui des auto-tangences "inverses", où les coorientations des deux branches en contact diffèrent. Il n'y a plus alors de bonne interprétation "tridimensionnelle" en terme de nœuds legendriens. Le résultat de la classification fait apparaître un invariant des fronts d'onde sans auto-tangence "inverses", qui étend aux fronts l'invariant J^- d'Arnold des courbes planes discuté plus haut.

4.7. Triangologie

Je regroupe dans cette section quelques commentaires sur les notes [**11**] et [**12**], qui sont suffisamment courtes et élémentaires pour qu'il soit inutile de les résumer.

4.7.1. Coefficients du binôme généralisés. Mon intérêt pour les astuces à base d'entiers quantiques en théorie combinatoire de nœuds (voir, par exemple, [**Po**]) m'a conduit à faire les observations suivantes.

Tout d'abord, il n'est pas anodin que, étant donné deux nombres entiers n et m, la fraction $\binom{n}{m} = \prod_{l=1}^{m} \frac{n-l+1}{l}$ soit un nombre entier. C'est un théorème (profond) que l'on apprend au lycée, et que l'on peut montrer par récurrence, d'après Pascal, ou bien en donnant une interprétation combinatoire à cette quantité, ou encore en examinant la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

On peut, en suivant Knuth et Wilf [**KW**], se demander quelles suites d'entiers (ou de polynômes à coefficients entiers) $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont telles que si l'on remplace les entiers par les x_n, la fraction correspondante

$$\binom{n}{m}_x = \prod_{l=1}^{m} \frac{x_{n-l+1}}{x_l}$$

reste un entier. De telles suites sont considérées au moins depuis Carmichael [**Car**], qui a observé qu'une version à deux variables de la suite des entiers quantiques ($x_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}$) est un exemple d'une suite ayant cette propriété. Les entiers quantiques "classiques" correspondant au cas particulier $a = 1$, $b = q$ (voir [**CK**] pour une introduction au *quantum calculus*).

Dans [**11**], je considère la suite $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ définie en itérant un polynôme générique P à partir de la valeur 0 : $x_0 = 0, x_{n+1} = P(x_n)$. Je montre qu'elle possède la propriété de Knuth et Wilf. Cette construction contient les entiers quantiques comme cas particulier (prendre $P(X) = 1 + qX$).

Je montre par ailleurs que la suite $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ de polynômes de la variable X à coefficients dans $\{0, 1\}$ et égaux à $(1 + X)^n$ modulo 2 est aussi de ce type. Contrairement aux exemples discutés précédemment, cette dernière suite n'est pas un morphisme pour le pgcd.

4.7.2. Suite de Thue-Morse-Fibonacci. La suite de Thue-Morse est un objet récurrent dans de nombreux domaines des mathématiques (voir, par exemple, [**Ma**] [**AS**]). Son nom fait référence à Marston Morse [**Mor**], déjà à l'honneur dans les parties précédentes, qui l'a redécouverte pour construire un exemple en géométrie hyperbolique.

L'une des multiples définitions équivalentes de la suite de Thue-Morse est la suivante : c'est la suite $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ vérifiant

$$t_0 = 0, t_{2n} = t_n \text{ et } t_{2n+1} = 1 - t_n.$$

Ainsi $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 1,\ t_3 = 0$. Le mot

$$0110100110010110\ldots,$$

écrit dans l'alphabet à deux caractères$\{0,1\}$ et composé de tous les termes de cette suite, jouit de nombreuses propriétés dynamiques, combinatoires et statistiques. Un autre mot écrit dans le même alphabet et souvent considéré en combinatoire des mots, est le mot de Fibonacci

$$101101011011010110101\ldots,$$

qui est la limite de la suite de mots finis $F_n,\ n \in \mathbb{N}$ définie par la récurrence $F_0 = 0$, $F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n \# F_{n-1}$, où $\#$ désigne la concaténation des mots. Il se trouve que le mot de Thue-Morse possède une définition du même type : C'est la limite de la suite de mots finis $T_n,\ n \in \mathbb{N}$ définis par la récurrence suivante : $T_1 = 0$, $T_{n+1} = T_n \# \overline{T_n}$, où $\overline{w}$ désigne le mot obtenu en échangeant les 1 et les 0 dans w.

Dans [**12**], je mélange ces deux récurrences : j'introduis la suite de mots $Z_n,\ n \in \mathbb{N}$, définie par la récurrence $Z_0 = 0,\ Z_1 = 01,\ Z_{n+1} = Z_n \# \overline{Z_{n-1}}$. Le mot limite est donc

$$011101001000110001011\ldots,$$

qui semble être inconnu de [**OEIS**].

Le théorème principal de [**12**] montre qu'une certaine propriété de la suite de Thue-Morse, découverte par Bacher et Chapman dans [**BC**], se généralise joliement à la suite Z définie ci-dessus. Le premier intérêt de [**12**] est de montrer que tout se passe harmonieusement et donc que les objets introduits (la suite Z, et deux familles de matrices "auto-similaires") sont "bons".

Une observation simple tirée de [**12**], mais qui mérite d'être signalée est que *la matrice "de Sierpinski"*[15] *(dont le coefficient $L_{i,j} \in \{0,1\}$ est égal à $\binom{i}{j} \mod 2$) possède un logarithme (resp. un inverse) dans les matrices à coefficients dans* $\{0,1\}$ *(resp.* $\{-1,0,1\}$ *)*. Ce n'est pas une coïncidence : le logarithme et l'inverse de L possèdent une interprétation combinatoire naturelle en termes d'ensembles partiellement ordonnés.

Pour conclure cette partie, je veux mentionner le fait que les rares matrices à coefficients entiers ayant un logarithme à coefficients entiers (dont fait donc partie la matrice de Sierpinski) jouissent de propriétés remarquables. Citons par exemple le fait (laissé en exercice) que si deux matrices a et A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont telles que $Id + A = e^a$, alors elles sont toutes deux nilpotentes, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{k?}A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, où $k? = \prod_{l=1}^{k} r(l)$, avec $r(l)$ égal au produit des facteurs premiers distincts de l (ainsi $1? = 1,\ 2? = 2,\ 3? = 6,\ 4? = 12,\ 5? = 60,\ \ldots$). On vérifie que

[15]Ainsi nommée à cause de ses propriétés auto-similaires, qui en font une version matricielle du naperon de Sierpinski.

k divise k ?, et donc, dans la série

$$a = \ln(Id + A) = \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k,$$

dont la somme est par hypothèse à coefficients entiers, chacun des termes est *déjà à coefficients entiers*. Lorsque $A + Id$ est la matrice de Sierpinski, on peut montrer que, en fait, $\frac{1}{k\,!} A^k$ est à coefficients entiers pour tout k.

CHAPITRE 5

Conclusion en forme de programme de recherches

La topologie symplectique est restée longtemps un domaine distinct, certes passionnant, mais avec sa problématique propre et sans grandes retombées sur les questions classiques de topologie. Mais depuis quelques années, des connections intimes apparaissent entre la topologie en petite dimension et des phénomènes symplectiques. On a vu que l'inégalité de Bennequin forte [**KM1**] [**Ru6**], qui implique la conjecture de Milnor sur les nœuds toriques, découle maintenant de constructions de topologie diagrammatique de dimension 2 [**Ra**] [**Pl1**] [**Ng4**], constructions qui elles-mêmes reçoivent une interprétation symplectique (encore conjecturale) [**SeSm**], [**Man**]. Les invariants polynomiaux des nœuds (Jones, Homfly, Kauffman) , longtemps considérés comme des constructions combinatoires ou algébriques, trouvent en ce moment à la fois leur généralisation (catégorification [**Kh1**]) et leur interprétation topologique (symplectique). Citons aussi les invariants de Ng [**Ng3**] (invariants topologiques des nœuds tirés de l'homologie de contact relative).

La preuve donnée par Rutherford [**Rut**] de l'inégalité concernant les nœuds alternés conjecturée dans [**6**] vient s'inscrire dans ce tableau. Elle repose de manière fondamentale sur la notion de "décomposition des fronts d'onde" [**ChP**], inspirée de la théorie des familles génératrices. C'est ce jeu entre ce type de techniques "contact" et des questions de pure topologie de petite dimension que je souhaite explorer plus avant.

Bibliographie

Publications présentées ici :

[0] *Thèse*, Ecole Polytechnique, mai 1997.

[1] *On Legendre cobordisms*, Differential and symplectic topology of knots and curves, 23–35, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 190, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[2] *Singularities cancellation on wave fronts*, Topology Appl. 95 (1999), no. 2, 155–163.

[3] *On the Bennequin invariant and the geometry of wave fronts*, Geom. Dedicata 65 (1997), no. 2, 219–24

[4] *Sur la structure symplectique de la variété des géodésiques d'un espace de Hadamard*, Geom. Dedicata 68 (1997), no. 1, 79–89.

[5] *On a theorem of Chekanov*, Symplectic singularities and geometry of gauge fields, 39–48, Banach Center Publ., 39, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997.

[6] *On Legendrian knots and polynomial invariants* , Proc. Math. Soc. 130 (2002), 1169-1176.

[7] *Apparent contours and their Legendrian deformations*, Mosc. Math. J. 3 (2003), no. 3, 889–898.

[8] (avec Petr E. Pushkar') *Morse theory and global coexistence of singularities on wave fronts*, J. London Math. Soc. (2) 74 (2006), no. 2, 527–544.

[8bis] (avec Petr E. Pushkar') *Non-cancellation of cusps on wave fronts*, C.R.A.S., 327, 8 (1998), p. 6, Elsvier.

[9] *Arrangements of nested curves*, J. Knot Theory Ramifications 16 (2007), no. 2, 217–225.

[10] (avec Petr E. Pushkar') *Morse theory for sweeps*, preprint 2005.

[11] *Deformations of the Taylor formula*, J. Integer Seq. 10 (2007).

[12] *An analogue of the Thue-Morse sequence*, Electron. J. Combin. 14, (2007).

Références.

[Ai1] Aicardi, F., *On the classification of singularities in thermodynamics*, Physica D 158, 2001, p 175.

[Ai2] Aicardi, F., Valentin, P., Ferrand, E., *On the classification of generic phenomena in one parameter families of binary thermodynamic mixtures*, Phys. Chem. Chem. Phys., 2002, 4, p 884.

[AM] Akbulut, S. , Matveyev, R. : *A note on contact structures*, Pacific J. Math. **182** (1998), no. 2, 201–204.

[AG] Arnold, V.I., Givental, A.G. : *Symplectic geometry*, Encyclopaedia of mathematical science, vol. 4., Springer Verlag.

[AGV] Arnold, V.I., Gusein-Zade, S., Varchenko, A. *Théorie des singularités*, éditions MIR, Moscou.

[Ar0] Arnold, V.I. : *Arnold's problems*, Springer, 2004.

[Ar1] Arnold, V.I. : *Invariants and perestroikas of plane fronts*, Proceedings of the Steklov Institute for Mathematics, **209**, 1995, pp 14-64.

[Ar2] Arnold, V.I. : *Sturm theorems and symplectic geometry*, Functional analysis and its application, **19** (4), 1985, pp 1-10.

[Ar3] Arnold, V. I. *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*, With an appendix by F. Aicardi. Adv. Soviet Math., 21, Singularities and bifurcations, 33–91, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. p 14-64.

[Ar4] Arnold, V. I. *Contact geometry and wave propagation*, Enseign. Math. (2) 36 (1990), no. 3-4, 215–266.

[Ar5] Arnold, V.I. *The geometry of spherical curves and quaternion algebra* Uspekhi Mat. Nauk 50 (1995), no. 1(301), 3–68 ; translation in Russian Math. Surveys 50 (1995), no. 1, 1–68

[Ar6] Arnold, V.I. *Topological problems in the theory of asymptotic curves*, Tr. Mat. Inst. Steklova 225 (1999), Solitony Geom. Topol. na Perekrest., 11–20. translation in Proc. Steklov Inst. Math. 1999, no. 2 (225), 5–15

[Ar7] Arnold, V.I. *Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations*. The Floer memorial volume, 99–103, Progr. Math., 133, Birkhäuser, Basel, 1995.

[Ar8] Arnold, V.I. *On the Legendrian Sturm theory of space curves*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 32 (1998), no. 2, 1–7, 95 ; translation in Funct. Anal. Appl. 32 (1998), no. 2, 75–80

[AS] Allouche, J. P., and Shallit, J. *The Ubiquitous Prouhet-Thue-Morse Sequence*, Sequences and their applications (Singapore, 1998), 1–16, Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999.

[Au] Audin, M. *Geometry*, Universitext, Springer, 2002.

[BC] Bacher, R., Chapman, R. *Symmetric Pascal matrices modulo p*, European J. Combin. 25 (2004), no. 4, 459–473.

[Be] D. Bennequin. *Entrelacements et équation de Pfaff*. Astérisque **107-108** (1983), 83–161.

[Bo] Boy, W. *Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen*, Math. Annalen, **57**, 1903, pp 151-184.

[Bou] Bourgeois, F. *A Morse-Bott approach to contact homology*, Symplectic and contact topology : interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), 55–77, Fields Inst. Commun., 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[BT] Banchoff, T. ; Thom, R, *Erratum et compléments : "Sur les points paraboliques des surfaces"*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291 (1980), no. 8, A503–A505.

[Car] R.D. Carmichael, On the numerical factors of the arithmetics forms $\alpha^n \pm \beta^n$, *Ann Math* **15** (1913-1914), 30–70.

[Cha0] Chaperon, M. *Quelques questions de géométrie symplectique (d'après, entre autres, Poincaré, Arnol'd, Conley et Zehnder)* Bourbaki seminar, Vol. 1982/83, 231–249, Astérisque, 105-106, Soc. Math. France, Paris, 1983.

[Cha1] Chaperon, M. : *On generating families*, A. Floer Memorial Volume, 283–296, Progr. Math., 133, Birkhäuser, Basel, 1995

[Cha2] Chaperon, M. : *On a result of Eliashberg and Gromov*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), no. 7, 657–661.

[CGM] Chmutov, S., Goryunov, V., Murakami, H. *Regular legendrian knots and the HOMFLY polynomial of immersed plane curves*, Math. Ann. 317 (2000), 389-413.

[Coh] Cohen, R. L.*The immersion conjecture for differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 2, 237–328.

[Co] Colin, V., *Chirurgies d'indice un et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), no. 6, 659–663.

[CZ] Chaperon, M., Zehnder, E. : *Quelques résultats globaux en géometrie symplectique* Géométrie symplectique et de contact : autour du théorème de Poincaré-Birkhoff, Journ. lyonnaises Soc. math. France 1983, Semin. sud-rhodanien Geom. III, 1984, pp 51-121.

[CK] P. Cheung, V. Kac, *Quantum Calculus* Springer-Verlag New York (2002).

[Che1] Chekanov, Y. : *Critical points of quasifunctions and generating families of legendrian manifolds*, Funct. Anal. Appl. **30**, 1996.

[Che2] Chekanov, Y. *Differential algebra of Legendrian links*, Invent. Math. 150 (2002), no. 3, 441–483.

[Che3] Chekanov, Y. *Invariants of Legendrian knots.* Proceedings of the ICM, Beijing 2002, vol. 2, 385–394.

[ChP] Chekanov, Y., Pushkar, P., *Combinatorics of fronts of Legendrian links, and Arnol'd's 4-conjectures*, Uspekhi Mat. Nauk 60 (2005), no. 1(361), 99–154 ; translation in Russian Math. Surveys 60 (2005), no. 1, 95–149

[CG] Chmutov, S., Goryunov, V. : *Polynomial invariants of Legendrian links and wave fronts*, KNOTS '96 (Tokyo), 239–256, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997

[Da] Damian, M. *On the stable Morse number of a closed manifold*, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), no. 4, 420–430.

[Ei] Eisermann, M., *Vassiliev invariants and the Poincaré conjecture*, Topology 43 (2004), no. 5, 1211–1229.

[EG] Eliashberg, Y., Gromov, M., *Lagrangian intersection theory : finite-dimensional approach* Geometry of differential equations, 27–118, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998 see also : *Lagrangian intersections and the stable Morse theory* Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B 11, No.2, Suppl., 1997, pp 289-326 .

[EM] Eliashberg, M., Mishachev, N. *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[EGH] Eliashberg, Y. ; Givental, A. ; Hofer, H. *Introduction to symplectic field theory*, Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560–673.

[EES1] Ekholm, T. Etnyre, J. Sullivan, J. *Legendrian Submanifolds in R^{2n+1} and Contact Homology.* , preprint math.SG/0210124

[EES2] Ekholm, T. Etnyre, J. Sullivan, J. *Orientations in Legendrian contact homology and exact Lagrangian immersions* Internat. J. Math. 16 (2005), no. 5, 453–532.

[En1] Entov, M. : *On the Necessity of Legendrian Fold Singularities*, Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 20, 1055–1077.

[En2] Entov, M. : *Surgery on Lagrangian and Legendrian singularities*, Geom. Funct. Anal. 9 (1999), no. 2, 298–352.

[ENS] Etnyre, J., Ng, L., Sabloff, J., *Invariants of Legendrian knots and coherent orientations* J. Symplectic Geom. 1 (2002), no. 2, 321–367.

[EH] Etnyre, J. B., Honda, K. *Knots and contact geometry, I. Torus knots and the figure eight knot*, J. Symplectic Geom. 1 (2001), no. 1, 63–120.

[Ep] Epstein, J. : *On the Invariants and Isotopies of Legendrian and Transverse Knots*, dissertation, U. C. Davis, (1997).

[EF] Epstein, J., Fuchs, D. *On the invariants of Legendrian mirror torus links*, Symplectic and contact topology : interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), 103–115, Fields Inst. Commun., 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[EFM] Epstein, J., Fuchs, D., Meyer, M., *Chekanov-Eliashberg invariants and transverse approximations of Legendrian knots* Pacific J. Math. 201 (2001), no. 1, 89–106.

[FB] Fabricius-Bjerre, Fr. *A relation between the numbers of singular points and singular lines of a plane closed curve*, Math. Scand. 40 (1977), no. 1, 20–24.

[FI] Fuchs, D. ; Ishkhanov, T. *Invariants of Legendrian knots and decompositions of front diagrams* Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 3, 707–717, 783.

[FT] Fuchs, D., Tabachnikov, S. : *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, Topology **36** (1997), no. 5, 1025–1053.

[Fu] Fuchs, D. *Chekanov-Eliashberg invariant of Legendrian knots : existence of augmentations*, J. Geom. Phys. 47 (2003), no. 1, 43–65.

[FW] Franks, J., Williams, R. F., *Braids and the Jones polynomial* Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), no. 1, 97–108.

[FoWe] Fortune, B., Weinstein, A., *A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985), no. 1, 128–130.

[GH] Goryunov, V. V., Hill, J. W. : *A Bennequin number estimate for transverse knots*, Singularity theory (Liverpool, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser ., **263**, (1999), 265–280.

[Gi0] Giroux, E. *Topologie de contact en dimension* 3 Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93. Astérisque No. 216, (1993), Exp. No. 760, 3, 7–33.

[Gi1] Giroux, E. *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 4, 637–677.

[Giv] Givental, A. B., *Nonlinear generalization of the Maslov index. Theory of singularities and its applications*, 71–103, Adv. Soviet Math., 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[Ha] Halpern, B. *Global theorems for closed plane curves*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 1970 96–100.

[Hae] Haefliger, A., *Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan*, Ann. Inst. Fourier. Grenoble 10 1960 47–60.

[Ho] Hofer, H, *Lagrangian embeddings and critical point theory*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (1985), no. 6, 407–462.

[HT] Hoste, J., Thistlethwaite, M. : *Knotscape*, http ://www.math.utk.edu/∼morwen/knotscape.html

[GKP] Graham, R.L., Knuth, D.E, Patashnik, O., *Concrete mathematics*, second edition, Addison-Wesley, 1994.

[Kan] Kanda, Y. : *On the Thurston-Bennequin invariant of Legendrian knots and non exacteness of the Bennequin inequality*, Invent. Math. **133** (1998), no. 2, 227–242.

[Kau] Kauffman, L. :*Knots and Physics*, World Scientific, 1991.

[Kaz] Kazaryan, M. *First-order invariants of strangeness type for plane curves*, Tr. Mat. Inst. Steklova 221 (1998), 213–224 ; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 1998, no. 2 (221), 202–213

[Kh0] Khovanov, M., *Doodle groups* Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 6, 2297–2315.

[Kh1] Khovanov, M. *categorification of the Jones polynomial.* Duke Math. J. 101 (2000), no. 3, 359–426.

[KR] Khovanov, M., Rozansky, M., *Link homology and matrix factorization I & II*, preprint math.QA/0401268 et math.QA/0505056

[KW] D.E. Knuth, H.S. Wilf, *The power of a prime that divides a generalized binomial coefficient J. Reine Angew. Math* **396** (1989), 212–219.

[KM1] Kronheimer, P., Mrowka, T., *Monopoles and contact structures*, Invent. Math. **130** (1997), no. 2, 209–255.

[KM2] Kronheimer, P., Mrowka, T., *Witten's conjecture and property P*, Geom. Topol. 8 (2004), 295–310.

[La] Laudenbach, F. *Immersions lagrangiennes et fonctions génératrices*, Aspects dynamiques et topologiques des groupes infinis de transformation de la mécanique (Lyon, 1986), 79–85, Travaux en Cours, 25, Hermann, Paris, 1987. (Reviewer : I. Vaisman) 58F05 (57R42)

[Le] Levine, H. *Elimination of cusps*, Topology 3 1965 suppl. 2, 263–296.

[LM] Litvinov, G. L. ; Maslov, V. P. *Idempotent mathematics : the correspondence principle and its computer realizations*, Uspekhi Mat. Nauk 51 (1996), no. 6(312), 209–210 ; translation in Russian Math. Surveys 51 (1996), no. 6, 1210–1211

[LS] Laudenbach, F., Sikorav, J.C., *Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent.* Invent. Math. 82 (1985), no. 2, 349–357.

[Man] Manolescu, C. *Nilpotent slices, Hilbert schemes, and the Jones polynomial*, preprint math.SG/0411015

[Ma] Mauduit, C. *Multiplicative properties of the Thue-Morse sequence*, Period. Math. Hungar. 43 (2001), no. 1-2, 137–153.

[Mi] Millett, K C. : *Generic smooth maps of surfaces* Topology Appl. **18**, 1984, pp 197-215.

[Mis] Mishachev, K., *The N-copy of a topologically trivial Legendrian knot*, J. Symplectic Geom. 1 (2003), no. 4, 659–682.

[Moe] Le théorème de Möbius sur les inflexions : Tout le monde en parle, personne ne connait la référence !

[Mo] Morton, H. : *Seifert circles and knot polynomials*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986), no. 1, 107–109.

[Mor] Morse, H. M. *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), no. 1, 84–100.

[Ng1] Ng, L. *Computable Legendrian invariants*, Topology 42 (2003), no. 1, 55–82.

[Ng2] Ng, L. *Maximal Thurston-Bennequin number of two-bridge knots*, Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), 427–434.

[Ng3] Ng, L. *Knot and braid invariants from contact homology I &II.* , Part I : Geom. Topol. 9 (2005), 247–297. Part II : Geom. Topol. 9 (2005), 1603-1637.

[Ng4] Ng, L. *A Legendrian Thurston-Bennequin bound from Khovanov homology*, Algebr. Geom. Topol. 5 (2005), 1637–1653

[NT] Ng, L., Traynor, L. *Legendrian solid-torus links*, J. Symplectic Geom. 2 (2004), no. 3, 411–443.

[OEIS] Sloane, N., *Online encyclopedia of integer sequences*, http ://www.research.att.com/~njas/sequences/

[Pa1] Panov, D., *Shrinkable curves and the Möbius theorem on three inflection points*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 32 (1998), no. 1, 29–39, 96 ; translation in Funct. Anal. Appl. 32 (1998), no. 1, 23–31.

[Pa2] Panov, D., *Parabolic curves and gradient mappings* Tr. Mat. Inst. Steklova 221 (1998), 271–288 ; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 1998, no. 2 (221), 261–278.

[Pa3] Panov, D., *Special points of surfaces in a three-dimensional projective space*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 34 (2000), no. 4, 49–63, 96 ; translation in Funct. Anal. Appl. 34 (2000), no. 4,

[Pl1] Plamenevskaya, O. *Transverse knots and Khovanov homology*, preprint math.GT/0412184.

[Pl2] Plamenevskaya, O. *Bounds for the Thurston-Bennequin number from Floer homology*, Algebr. Geom. Topol. 4 (2004), 399–406.

[Po] Polyak, M. *On the Bennequin invariant of Legendrian curves and its quantization*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322 (1996), no. 1, 77–82.

[Pu1] Pushkar', P.E. : *The Maslov index and symplectic Sturm theorems*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 32 (1998), no. 3, 35–49, 95–96 ; translation in Funct. Anal. Appl. 32 (1998)

[Pu2] Pushkar', P.E. : *Generalizations of the Chekanov theorem : Diameters of immersed manifolds and wave fronts*, Local and Global Problems of Singularity Theory, Proceedings of the Steklov Institute for Mathematics, **221**, 1998, pp 279-295.

[Ra] Rasmussen, J. *Khovanov homology and the slice genus*, preprint math.GT/0402131

[Ru1] Rudolph, L., : *Construction of quasipositive knots and links, II*, Contemp. Math. **35**, 485-491.

[Ru2] Rudolph, L., : *A congruence between link polynomials*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1990) **107**.

[Ru3] Rudolph, L., : *Quasi-positive annuli (construction of quasipositive knots and links, IV)*, J. Knot Th. Ramifications (1992) **1**, 4.

[Ru4] Rudolph, L. : *Totally tangential links of intersection of complex curves with round spheres*, Topology'90 (eds. Apanasov et al.), DeGryuter, 1992.

[Ru5] Rudolph, L., : *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. A.M.S. (1993) **29**, 1.

[Ru6] Rudolph, L., : *An obstruction to sliceness via contact geometry and "classical" gauge theory*, **119** Invent. Math. (1995) , 155-163.

[Rut] Rutherford, Dan., *Thurston-Bennequin number, Kauffman polynomial, and ruling invariants of a Legendrian link : the Fuchs conjecture and beyond*, Int. Math. Res. Not. 2006,

[Sa1] Sabloff, J., *Invariants of Legendrian knots in circle bundles*, Commun. Contemp. Math. 5 (2003), no. 4, 569–627.

[Sa2] Sabloff, J., *Augmentations and rulings of Legendrian knots*, Int. Math. Res. Not. 2005, no. 19, 1157–1180.

[SeSm] Seidel, P., Smith, I., *A link invariant from the symplectic geometry of nilpotent slices* , preprint math.SG/0405089

[Sh0] Shumakovich, A. *Exposé au séminaire Arnold*, Paris, 1997, non publié.

[Sh1] Shumakovich, A. *Rasmussen invariant, Slice-Bennequin inequality, and sliceness of knots*, preprint math.GT/0411643

[Si1] Sikorav, J.C. *Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 4, 543–552.

[Si2] Sikorav, J.C. *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne*, Comment. Math. Helv. 62 (1987), no. 1, 62–73.

[St1] Stoimenow, A., *Some inequalities between knot invariants*, Internat. J. Math. 13 (2002), no. 4, 373–393.

[St2] Stoimenow, A., *On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton-Williams-Franks*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 10, 3927–3954.

[Ta1] Tabachnikov, S. : *Estimates for the Bennequin number of Legendrian links from state models for knot polynomials*, Math. Res. Lett. **4** (1997), no. 1, 143–156.

[Ta2] Tabachnikov, S. : *Invariants of smooth triple point free plane curves*, J. Knot Theory Ramifications 5 (1996), no. 4, 531–552.

[Th] Théret, D. *A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions*, Topology Appl. 96 (1999), no. 3, 249–266.

[Tan] Tanaka, T. : *Maximal Bennequin numbers and Kauffman polynomials of positive links*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 11, 3427–3432.

[Tr] Traynor, L., *Legendrian circular helix links*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 122 (1997), no. 2, 301–314.

[Ur1] Uribe, R., *On 4-Flattening Theorems and the Curves of Caratheodory, Barner and Segre*, Journal of Geometry, 77, 2003, pp. 184-192.

[Ur2] Uribe, R., *On Singularities, "Perestroikas" and Differential Geometry of Space Curves*, L'Enseignement Mathématique, t.50 (2004), 69-101.

[Ur3] Uribe, R., *Singularités symplectiques et de contact en géométrie différentielle des courbes et des surfaces*, Thèse université Paris-7, 2001.

[Va0] Vassiliev, V. A. : *Introduction to topology*, AMS, 2001.

[Va1] Vassiliev, V. A. : *Lagrange and Legendre characteristic classes* Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 3. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.

[Va2] Vassiliev, V. A. : *Complements of discriminants of smooth maps : topology and applications*, Translations of Mathematical Monographs, 98. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

[Vi1] Viterbo, C., *Generating functions, symplectic geometry, and applications* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 537–547, Birkhäuser, Basel, 1995.

[Vi2] Viterbo, C., *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Math. Ann. 292 (1992), no. 4, 685–710.

[Vir1] Viro, O. *Generic immersions of the circle to surfaces and the complex topology of real algebraic curves*, Topology of real algebraic varieties and related topics, 231–252, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 173, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Vir2] Viro, O. *Khovanov homology, its definitions and ramifications*, Fund. Math. 184 (2004), 317–342.

[We1] Weinstein, A. *C^0 perturbation theorems for symplectic fixed points and Lagrangian intersections*, Géométrie symplectique et de contact : autour du théorème de Poincaré-Birkhoff, Journ. lyonnaises Soc. math. France 1983, Sémin. sud-rhodanien Géom. III, 140-144 (1984)

[We2] Weinstein, A. *Removing intersections of Lagrangian immersions*, Illinois J. Math. 27 (1983), no. 3, 484–500.

[Wh] Whitney, H. *On regular closed curves in the plane*, Compos. Math. 4, 276-284 (1937)

[Wu] Wu, H. *Braids and the Khovanov-Rozansky Cohomology*, preprint math.GT/0508064.