

Corrigé de la Feuille de TD 2 de Revêtements et Groupe Fondamental : constructions d'espaces topologiques, un peu d'homotopie

Rappels préliminaires sur les homotopies : rappelons que deux applications continues $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopes (on notera $f_0 \simeq f_1$) si il existe une application continue $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ telle que les restrictions $H(0, -) = f_0$ et $H(1, -) = f_1$. On rappelle les propriétés suivantes:

- i) La relation d'homotopie est une relation d'équivalence; autrement dit $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$, $f \simeq f$ et $f \simeq g$ et $g \simeq h$ implique $f \simeq h$.
- ii) La relation d'homotopie est compatible avec la composition des fonctions:

$$\forall g : Y \rightarrow Z \text{ et } h : T \rightarrow X, \quad f_0 \simeq f_1 \Rightarrow g \circ f_0 \simeq g \circ f_1, \text{ et } f_0 \circ h \simeq f_1 \circ h.$$

Le point i) signifie en particulier que l'on peut composer les homotopies: si H est une homotopie entre f_0 et f_1 et G une homotopie entre f_1 et f_2 , on a alors une homotopie $G \star H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ donnée par

$$G \star H(t, x) = \begin{cases} H(2t, x) & \text{si } t \leq 1/2 \\ G(2t - 1, x) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

dont on vérifie sans difficulté la continuité et le fait que $G \star H(0, -) = f_0$, $G \star H(1, -) = f_2$. De plus, comme l'intervalle est contractile, une homotopie est "inversible à homotopie près". C'est à dire que si H est une homotopie de f_0 à f_1 , alors l'application, notée abusivement $H^{-1} : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, définie par $H^{-1}(t, x) = H(1 - t, x)$ est une homotopie¹ de f_1 à f_0 et de plus $H^{-1} \star H$ (resp. $H \star H^{-1}$) est homotope à l'identité² id_{f_0} de f_0 (resp. id_{f_1}). Concrètement, cela signifie qu'il existe une application $K : [0, 1] \times [0, 1] \times X \rightarrow Y$ continue telle que $K(0, t, x) = H^{-1} \star H(t, x)$ et $K(1, t, x) = f_0(x)$ (resp. $K(0, t, x) = H \star H^{-1}(t, x)$ et $K(1, t, x) = f_1(x)$)³.

Une application continue $\phi : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie si il existe une application continue ψ qui soit "l'inverse de ϕ à homotopie près": c'est à dire que $\phi \circ \psi : Y \rightarrow Y$ est homotope à l'identité de Y et $\psi \circ \phi$ est homotope à l'identité de X . Quand une telle équivalence existe, on dit simplement que X et Y sont homotopes (que l'on notera $X \simeq Y$). Des propriétés ci-dessus des homotopies, on déduit que la relation d'être homotope pour des espaces topologiques est une relation d'équivalence.

Remarque heuristique : au vu des propriétés "d'inversibilité homotopique" des homotopies ci-dessus, il est légitime (mais pas forcément nécessaire) de penser à une homotopie H entre deux applications continues f_0, f_1 comme un opérateur inversible (définies sur les fonctions continues) qui transforme f_0 en f_1 .

Rappels sur les espaces compacts : On dit qu'un espace topologique X est compact si X est *séparé* et si on peut extraire de tout recouvrement ouvert de X un sous-recouvrement fini.

Un sous-ensemble compact d'un espace topologique est nécessairement fermé et tout fermé d'un compact est compact. Si X est compact et Y est *séparé* $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, $f(X)$ est compact et donc fermé. Par contre, si Y n'est pas séparé, $f(X)$ peut ne pas être fermé.

Exercice 1. (*Topologie quotient et séparation*) Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X . On note $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ l'application canonique. Pour $S \subset X$ on appelle *saturé de S* le sous-ensemble $p^{-1}(p(S)) = \{y \in X, \exists x \in S, x\mathcal{R}y\}$. On dira que $\mathcal{R}$ est ouverte si le saturé de tout ouvert est ouvert.

¹il s'agit simplement de l'homotopie H parcourue dans le sens inverse (par rapport à la variable t)

²d'où l'affirmation que H^{-1} est un inverse "homotopique" de H

³bien sur, l'homotopie "supérieure" K est tout aussi "inversible" que H !

1. Montrer qu'il existe un unique (à homéomorphisme près) espace topologique $\tilde{X}$ et application continue $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$, constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, tels que pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$ qui est constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, il existe une unique application continue $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$ qui factorise f , c'est à dire telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$. Décrire explicitement cette topologie. A quelle condition une application $g : \tilde{X} \rightarrow Z$ est-elle continue ? Montrer que si f est ouverte, $\tilde{f}$ est ouverte.
2. Montrer que si X est connexe alors $\tilde{X}$ est connexe. Même question avec connexe par arcs.
3. Montrer que si le graphe $\mathcal{R} = \{(x, y), x\mathcal{R}y\} \subset X \times X$ est fermé et $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.
4. Donner un exemple d'espace séparé X et de relation $\mathcal{R}$ tels que $X/\mathcal{R}$ soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-séparé tel que $X/\mathcal{R}$ soit séparé.
5. On suppose maintenant X compact (en particulier séparé). Montrer que si le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé, alors $X/\mathcal{R}$ est compact (en particulier séparé).
6. Montrer que le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation $(x, y) \sim (2x, 2y)$ n'est pas séparé tandis que le quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par la même relation l'est.

Solution 1. 1. On munit, évidemment, $X/\mathcal{R}$ de sa topologie quotient (cf le cours de L3) définie par: $U \subset X/\mathcal{R}$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert. Les propriétés de commutation de la pré-image avec les unions et intersection assurent que cela définit bien une topologie sur $X/\mathcal{R}$. Cette topologie rend p continue par définition⁴ et est constante sur chaque classe d'équivalence. Enfin notons que p est surjective.

On montre facilement que muni le couple $(X/\mathcal{R}, p : X \rightarrow X/\mathcal{R})$ vérifie la propriété demandée pour $(\tilde{X}, \pi)$. En effet soit Y est un autre espace topologique, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue constante sur chaque classe. Une factorisation de f , si elle existe, vérifie nécessairement que, pour toute classe $[x] \in X/\mathcal{R}$, $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}(p(x)) = f(x)$ ce qui assure l'unicité (par surjectivité de $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$) de $\tilde{f}$, *mais pas* encore son existence. En effet, $\tilde{f}$ doit être défini par la formule ci-dessus, mais il reste à voir que cette formule donne bien une application continue. C'est en fait très facile: Si $V \subset Y$ est ouvert alors, $\tilde{f}^{-1}(V)$ est ouvert dans $X/\mathcal{R}$ si et seulement si, par définition, $p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ est ouvert, ce qui est assuré par la continuité de f !

Passons à l'unicité. Soit $(\tilde{X}, \pi)$ une autre paire vérifiant les conditions demandées. Comme $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ est continue, constante sur chaque classe, il existe une unique application continue $\tilde{\pi} : X/\mathcal{R} \rightarrow \tilde{X}$ factorisant π : $\pi = \tilde{\pi} \circ p$. De même, il existe une unique application continue $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X/\mathcal{R}$ factorisant p : $p = \tilde{p} \circ \pi$. On en déduit que $\tilde{p} \circ \tilde{\pi} : X/\mathcal{R} \rightarrow X/\mathcal{R}$ est une application continue (nécessairement unique par hypothèse) factorisant $id_{X/\mathcal{R}}$, c'est donc l'identité. De même $\tilde{\pi} \circ \tilde{p}$ est l'identité de $\tilde{X}$ et donc $\tilde{X}$ est homéomorphe à $X/\mathcal{R}$.

Une application $g : \tilde{X} \rightarrow Z$ est continue si et seulement si $g \circ p$ est continue par unicité de la factorisation (et surjectivité de p). De plus si V est un ouvert de $\tilde{X}$, $\tilde{f}(V) = \tilde{f}(p(p^{-1}(V))) = f(p^{-1}(V))$ qui est ouvert si f est ouverte.

2. Comme p (et donc π) est surjective et continue, le résultat est immédiat.
3. Soit $[x] \neq [y]$. Alors $(x, y) \in X^2 - \mathcal{R}$ qui est ouvert et, il existe deux ouverts U_x, V_y voisinages disjoints de x, y inclus dans $X^2 - \mathcal{R}$ (car la topologie produit est engendrée par les produits

⁴c'est même la topologie la plus fine vérifiant cette propriété

d'ouverts). On en déduit que $p(U_x)$, $p(U_y)$ sont ouverts disjoints et contiennent respectivement $[x]$ et $[y]$.⁵

4. On considère le quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-groupe $\mathbb{Q}$ (c'est à dire $x\mathcal{R}y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$). Alors l'espace quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un espace (non-dénombrable) muni de la topologie grossière. En effet, tout ouvert de $\mathbb{R}$ contient un (et en fait une infinité) de points de la forme $x + \mathbb{Q}$ par densité de $x + \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et donc un représentant de chaque classe.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ des espaces non-séparés. Alors $\coprod X_i$ n'est pas séparé, mais le quotient $X/\mathcal{R}$ de X par la relation $x\mathcal{R}y$ ssi $x, y \in X_i$ (pour un certain i) est l'ensemble I muni de la topologie discrète, donc séparé.

5. On suppose maintenant que X est compact⁶. L'image par une application continue d'un espace compact dans un espace *séparé* est compact, donc il suffit de montrer que $X\mathcal{R}$ est séparé pour conclure.

Comme la relation (ou plus précisément son graphe $\mathcal{R} \subset X^2$) est fermé (dans X^2), la relation $\mathcal{R}$ est *fermée*, c'est à dire que si F est fermé dans X , son saturé $p^{-1}(p(F))$ est fermé. En effet, le saturé de F est égal à l'image de $(F \times X) \cap \mathcal{R}$ par la projection de $p_X : F \times X$ sur X . Or $F \times X$ et $\mathcal{R}$ sont fermés dans le compact $X \times X$, donc compact ainsi que leur intersection. De même, X compact implique que $p_X(F \times X) \cap \mathcal{R}$ est compact et donc fermé. On a bien montré que le saturé de tout fermé est fermé (notons que ceci est équivalent à dire que la projection $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est fermée).

Montrons enfin que $X/\mathcal{R}$ est séparé. Soit $p(x) = [x] \neq [y] = p(y)$ deux points distincts de $X/\mathcal{R}$. Alors $p^{-1}([x])$ et $p^{-1}([y])$ sont les saturés de $\{x\}$ et $\{y\}$ et sont donc fermés vu ci-dessus⁷. Ils sont de plus disjoints par hypothèse. On va utiliser qu'un espace compact est normal⁸, c'est à dire que pour tout fermés disjoints F_1, F_2 , il existe des ouverts disjoints U_1, U_2 qui contiennent respectivement F_1 et F_2 (autrement dit, on peut séparer les fermés par des ouverts).

On peut donc trouver des ouverts disjoints U_x, U_y contenant respectivement $p^{-1}([x])$ et $p^{-1}([y])$. La seule difficulté maintenant (pour passer au quotient) est que U_x et U_y ne sont pas nécessairement des ouverts saturés. Mais $X - U_x$ est un fermé disjoint de $p^{-1}([x])$, c'est donc aussi le cas de son saturé F_x et il suit que $X - F_x$ est un ouvert saturé contenant $p^{-1}([x])$ et inclus dans U_x . De même, on construit un ouvert saturé $X - F_y$ contenant $p^{-1}([y])$ et inclus dans U_y , en particulier disjoint de $X - F_x$. Il suit que $p(X - F_x)$ et $p(X - F_y)$ sont des ouverts disjoints qui séparent $p(x)$ et $p(y)$ dans $X/\mathcal{R}$. Il vaut mieux faire des dessins pour comprendre le paragraphe précédent !

6. On quotiente donc $\mathbb{R}^2$ par le groupe (isomorphe à $\mathbb{Z}$) engendré par l'homothétie de centre 0 et de rapport 2. En particulier, les orbites de tout élément sont contenus dans la demi-droite vectorielle passant par ce point.

Soit U un voisinage ouvert de la classe $[0]$; alors $p^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 et contient donc une boule ouverte $B(0, \varepsilon)$. Mais pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x \sim x/2^n$ et $x/2^n$ est dans $B(0, \varepsilon)$ pour n assez grand. Par conséquent, $B(0, \varepsilon)$ contient un représentant de chaque classe, donc $U = \mathbb{R}^2 / \sim$, et 0 ne peut être séparé d'aucun point !

Montrons que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$ est séparé. Remarquons que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}_+^*$. Si $[z] \neq [z'] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$ avec z, z' non-colinéaires, on peut trouver deux (demi-)cônes ouverts contenant les

⁵Attention, le fait que le graphe de $\mathcal{R} \subset X^2$ soit fermé ne suffit pas en général pour que le quotient soit séparé (mais est nécessaire). Par exemple, considérons un espace X séparé mais pas normal. Alors, il existe des fermés A et B qui ne peuvent être séparés par aucun ouvert. La relation $a\mathcal{R}a'$ pour tout $a, a' \in A$, $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in X$ et $b\mathcal{R}b'$ pour tout $b, b' \in B$ est clairement fermée mais le quotient n'est pas séparé...

⁶rappelons que cela veut dire qu'il vérifie que pour tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini et qu'il est *séparé*, point qu'on oublie trop souvent, mais qu'on peut oublier si on travaille dans des espaces métriques par exemple

⁷Rappelons que dans un espace séparé, les points sont fermés

⁸c'est un bon exercice, cf la partie sur la compacité dans le cours de L3

(demi-)droites vectorielles qui les contiennent et ne se rencontrent pas. Comme des (demi-)cônes sont saturés, leur image par p fournit des ouverts séparant $[z]$ et $[z']$ (faire un dessin).

Supposons z et z' alignés. A une rotation près, on peut les supposer dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. Or tout élément t de $\mathbb{R}_+^*$ a une unique représentant dans $[1, 2[$. On peut donc identifier $\mathbb{R}_+^*/\sim$ au quotient $[1, 2]/(1 \sim 2)$ (le vérifier soigneusement) qui est séparé car homéomorphe à $[0, 1]/(0 \sim 1) \cong S^1$.

Il suit que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est séparé. Au vu des arguments donnés ci-dessus, on a en fait montré que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.

Remarque (Sur la compatibilité du quotient et des produits). Soient X et Y deux espaces topologiques munis chacun d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}_X$ et $\mathcal{R}_Y$. On peut alors définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y$ par

$$(x, y)\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y(x', y') \iff x\mathcal{R}_X x' \text{ et } y\mathcal{R}_Y y'.$$

Les applications $X \rightarrow X/\mathcal{R}_X$ et $Y/\mathcal{R}_Y$ induisent une application continue $X \times Y \rightarrow X/\mathcal{R}_X \times Y/\mathcal{R}_Y$ constante sur les classes d'équivalences de $\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y$. On en déduit donc une application continue

$$\phi : X \times Y/\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y \rightarrow X/\mathcal{R}_X \times Y/\mathcal{R}_Y,$$

qui est bijective, mais n'est en général pas un homéomorphisme.

Proposition 1. Si Y est localement compact, et $\mathcal{R}_Y$ est l'identité, alors ϕ est un homéomorphisme.

Soit T un ouvert de $X \times Y/\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y$, on veut montrer que $\phi(T)$ est ouvert. Soit $(x_0, y_0) \in \phi(T)$. Soit $x'_0 \in X$ tel que $\pi_X(x'_0) = x_0$.

Soit $T' := \pi_{X \times Y}^{-1}(T)$, c'est un ouvert saturé de $X \times Y$ contenant (x'_0, y_0) . Il existe donc un voisinage $U \subset X$ de x'_0 et un voisinage $K \subset Y$ de y_0 tel que $U \times K \subset T'$. De plus comme Y est localement compact, on peut supposer K compact.

Soit $W = \{x \in X, x \times K \subset T'\}$. Comme T' est saturé, W est aussi saturé. De plus comme K est compact, W est ouvert. En effet, si $x \in W$, pour tout $y \in K$ il existe des voisinages ouverts U_k de x dans X et V_k de k tels que $U_k \times V_k \subset T'$. La famille $(V_k)_{k \in K}$ est un recouvrement ouvert de K , donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(V_k)_{k \in I}$. Alors $\cap_{k \in I} U_k \subset W$ est un ouvert de X contenant x , ce qui prouve que W est ouvert. Alors $p(W)$ est ouvert puisque $p^{-1}p(W) = W$ et contient x . Donc $p(W) \times K$ est un voisinage ouvert de (x_0, y_0) qui est inclu dans $\phi(T)$, ce qui prouve que $\phi(T)$ est ouvert.

Exercice 2. (cônes, espaces des chemins, recollements ...) Soit X un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

1. Le **cône sur** X est l'espace topologique quotient $C(X) := (X \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (y, 1))$.
 - (a) Montrer que X s'identifie⁹ à un sous-espace fermé de $C(X)$ et qu'il existe une application naturelle $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$ induite par f .
 - (b) Montrer que $C(X)$ est *contractile*.
 - (c) Montrer que si X est séparé, $C(X)$ est séparé.
2. Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vide de X et $f : A \rightarrow Y$, une application continue. Le **recollement de X sur Y par f** est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \coprod Y) / (x \sim f(x), x \in A).$$

- (a) Que peut-on dire si il existe deux applications continues $g : X \rightarrow Z$, $h : Y \rightarrow Z$ qui vérifie $g(a) = h \circ f(a)$ pour tout $a \in A$? Montrer que si $Z \subset X$ est un sous-espace non-vide de X , l'espace quotient X/Z s'identifie à un recollement.

⁹c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme entre X et un sous-espace de $C(X)$.

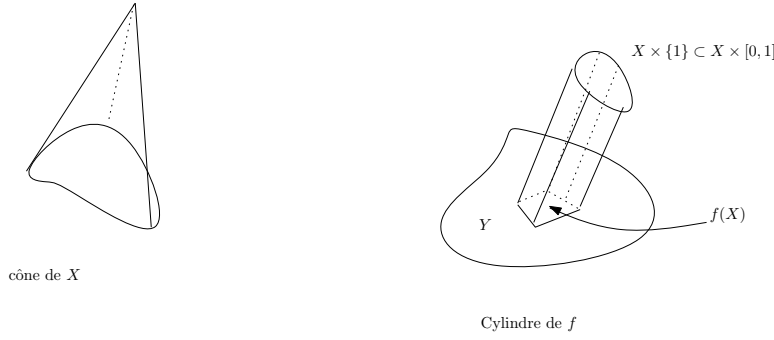


Figure 1: Le cône de X et le cylindre de $f : Y \rightarrow X$

- (b) Montrer que $X \cup_f Y$ est connexe (resp. par arcs) si X et Y sont connexes (resp. par arcs).
- (c) Montrer que si A est fermé, alors Y s'identifie à un sous-espace de $X \cup_f Y$. Si de plus X, Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact. En particulier si F est un fermé d'un compact X , X/F est compact.
3. Le **cylindre de f** est le recollement $Cyl(f) := X \times [0, 1] \cup_{f \times \{0\}} Y$ où $f \times \{0\}$ est donné par $f \times \{0\} : X \times \{0\} \cong X \xrightarrow{f} Y$. Le **cône de f** est le recollement $C(f) := C(X) \cup_{f \times \{0\}} Y$. Montrer que si $\psi : Y \rightarrow Y'$ est une homotopie alors $Cyl(f)$ et $C(f)$ sont respectivement homotopes à $Cyl(\psi \circ f)$ et $C(\psi \circ f)$.
4. Soit $x \in X$ un point de X . On note $PX = \{f : [0, 1] \rightarrow X, f(0) = x\}$ l'**espace des chemins** (issus de x) que l'on munit de la topologie suivante: une (pré-)base d'ouvert est formée par les sous-ensembles $W(K, V) = \{f \in PX, f(K) \in V\}$ où K parcourt les compacts de $[0, 1]$ et V les ouverts de X . Montrer que PX est contractile.

Solution 2. 1. On note $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ l'application de passage au quotient.

- (a) L'application $x \mapsto i_0(x) = (x, 0) \in X \times [0, 1]$ est évidemment continue d'où il suit que la composée $i_X : X \xrightarrow{i_0} X \times [0, 1] \xrightarrow{\pi} C(X)$ est continue. Elle est clairement injective et de plus son image $i_X(X)$ est fermée dans $C(X)$ puisque sa pré-image par π est le fermé $X \times \{0\}$. Il reste à montrer que i_X induit bien un homéomorphisme de X sur $[X \times \{0\}] \subset C(X)$. Mais si U est un ouvert de X , $U \times [0, 1[$ est un ouvert saturé de $X \times [0, 1]$ et $i_X(U) = i_X(X) \cap \pi(U \times [0, 1[)$ est ouvert dans $i_X(X)$.

L'application composée $(x, t) \mapsto \pi_Y \circ (f(x), t)$ (où $\pi_Y : Y \times [0, 1] \rightarrow C(Y)$ est la projection canonique) induit une application continue $X \times [0, 1] \rightarrow C(Y)$ qui est constante sur chaque classe d'équivalence (pour la relation d'équivalence définissant $C(X)$). Il suit de la propriété universelle du quotient qu'elle se factorise en une unique application $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$. Un calcul immédiat (ou l'utilisation de l'unicité dans la propriété universelle) assure que $C(f \circ g) = C(f) \circ C(g)$ et $C(id_X) = id_{C(X)}$.

- (b) Soit $H : X \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ l'application continue qui envoie (x, t, s) sur $(x, 1 - (1 - t)(1 - s))$, et soit $H' := \pi f : X \times [0, 1] \times [0, 1]$. Soit $\sim \times =$ la relation d'équivalence sur $X \times [0, 1] \times [0, 1]$ engendrée par $(x, 1, s) \sim \times = (x', 1, s)$.

Alors H' est constante sur les classes d'équivalences de $\sim \times =$, donc définit une application continue $\tilde{H} : X \times [0, 1] \times [0, 1] / (\sim \times =) \rightarrow C(X)$. Or, comme $[0, 1]$ est compact, d'après la proposition 1 $X \times [0, 1] \times [0, 1] / (\sim \times =) \rightarrow C(X) \times [0, 1]$ est un homéomorphisme, d'où une application continue $\tilde{H}' : C(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$, qui vérifie la propriété voulue.

- (c) Soit $\pi(x, t) \neq \pi(x', t')$ deux points différents de $C(X)$.

Si $t, t' \neq 1$, comme $X \times [0, 1[$ est séparé, il existe des ouverts U de (x, t) et U' de (x', t') dans

$X \times [0, 1[$ (ce sont aussi des ouverts de $X \times [0, 1]$ car $X \times [0, 1[$ est lui-même ouvert) tels que $U \cap U' = \emptyset$. Or la relation d'équivalence est l'identité sur $X \times [0, 1[$ donc U et U' sont saturés.

On peut maintenant supposer par symétrie $t = 1$ (et donc $t' \neq 1$). Alors $X \times [0, 1 + t/2[$ et $X \times]1 + t/2, 1]$ sont des ouverts saturés d'intersection vide contenant (x', t') et (x, t) respectivement

2. On note $\pi : X \coprod Y \rightarrow X \cup_f Y = (X \coprod Y)/(x \sim f(x), x \in A)$ la projection canonique sur le quotient. On note aussi $\pi_X : X \rightarrow X \cup_f Y$ et $\pi_Y : Y \rightarrow X \cup_f Y$ les projections canoniques induites par la composition de π et des inclusions continues $X \rightarrow X \coprod Y$ et $Y \rightarrow X \coprod Y$.

(a) Les propriétés universelles de la topologie quotient et de la topologie de l'union disjointe assure qu'il existe une *unique application continue* $g \cup_f h : X \cup_f Y \rightarrow Z$ telle que $g(x) = g \cup_f h \circ \pi_X$ et $h(y) = g \cup_f h \circ \pi_Y$. On peut en fait facilement vérifier que $X \cup_f Y$ est la solution d'un problème universel.

Par construction (le vérifier soigneusement cependant), X/Z est le recollement $X \cup_p \{pt\}$ où $f : Z \rightarrow \{pt\}$ est l'application constante¹⁰.

(b) par continuité des projections π_X et π_Y , $\pi_X(X)$ et $\pi_Y(Y)$ sont connexes dans $X \cup_f Y$, ont un point commun (c'est là que A non-vide sert) et $\pi_X(X) \cup \pi_Y(Y) = X \cup_f Y$. Il suit que $X \cup_f Y$ est connexe (resp. connexe par arcs) si X et Y sont connexes (resp. connexes par arcs).

(c) L'application $\pi_Y : Y \rightarrow X \cup_f Y$ est injective puisque la relation d'équivalence n'identifie pas des points distincts de Y . Par ailleurs, Si A est fermé, $\pi^{-1}(\pi_Y(Y)) = A \coprod Y$ est fermé dans $X \coprod Y$, donc $\pi_Y(Y)$ est fermé dans le recollement $X \cup_f Y$. Plus généralement $\pi^{-1}(\pi_Y(F)) = (A \cap f^{-1}(F)) \coprod F$ est fermé si F est fermé, donc π_Y est fermée, continue et injective, c'est donc un homéomorphisme sur son image. On montrerait de même que $X - A$ s'identifie à un sous-espace ouvert de $X \cup_f Y$.

On suppose maintenant que X, Y sont compacts. A fermé dans X implique donc que A est compact. Par la question 5) de l'exercice 1, il suffit de vérifier que $\mathcal{R} \in (X \coprod Y) \times (X \coprod Y)$ est fermée. Or $\mathcal{R}$ est la réunion de $\Delta = \{(z, z), z \in X \coprod Y\}$ (qui est fermé car $X \coprod Y$ est séparé), des ensembles $\{(a, f(a)), a \in A\}$ et $\{(f(a), a), a \in A\}$ (qui sont fermés car image du compact A par une application continue dans l'espace séparé $(X \coprod Y) \times (X \coprod Y)$) et enfin de l'ensemble $\{(a, a') \in A \times A, f(a) = f(a')\}$ (qui est fermé car f est continue et $(X \coprod Y) \times (X \coprod Y)$ est séparé). $\mathcal{R}$ est donc bien une réunion finie de fermés !

3. Considérons la composée $X \times [0, 1] \coprod Y \xrightarrow{id \times \psi} X \times [0, 1] \coprod Y' \rightarrow Cyl(\psi f)$. Elle envoie $(x, 0)$ et $f(x)$ sur le même point, donc ce factorise en une application continue $\alpha_\psi : Cyl(f) \rightarrow Cyl(\psi f)$. Soit ψ' un inverse de ψ à homotopie près, on obtient $\alpha_{\psi'} \alpha_\psi = \alpha_{\psi' \psi} : Cyl(f) \rightarrow Cyl(\psi' \psi f)$. Il suffit de montrer que si $\lambda : Y \rightarrow Y$ est homotope à l'identité, α_λ est une équivalence d'homotopie. Soit $h : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(-, 0) = id_Y$ et $h(-, 1) = \lambda$. On définit $\beta : Cyl(\lambda f) \rightarrow Cyl(f)$ par :

$$\begin{cases} (x, t) \mapsto (x, 2t - 1) & \text{si } t \geq 1/2 \\ (x, t) \mapsto h(f(x), 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ y \mapsto y \end{cases}$$

On construit une homotopie de $id_{Cyl(f)}$ vers $\beta \alpha$ par :

$$\begin{cases} ((x, t), u) \mapsto (x, \frac{2t-u}{2-u}) & \text{si } t \geq u/2 \\ ((x, t), u) \mapsto h(f(x), \frac{u-2t}{1-2t}) & \text{si } t < u/2 \\ (y, u) \mapsto h(y, u) \end{cases}$$

¹⁰qui de toute façons est la seule possible

De même, on construit une homotopie de $id_{Cyl(\lambda f)}$ vers $\alpha\beta$ par :

$$\begin{cases} ((x, t), u) \mapsto (x, \frac{2t-u}{2-u}) & \text{si } t \geq u/2 \\ ((x, t), u) \mapsto \lambda(h(f(x), \frac{u-2t}{1-2t})) & \text{si } t < u/2 \\ (y, u) \mapsto h(y, u) \end{cases}$$

Remarque : par construction du cylindre de $f : X \rightarrow Y$, Y s'identifie canoniquement à un sous-espace fermé de $Cyl(f)$. De plus la projection $X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\}$ induit une rétraction $r : Cyl(f) \rightarrow Y$ (c'est à dire que $Y \hookrightarrow Cyl(f) \xrightarrow{r} Y$ est l'identité de Y). De plus l'application $Cyl(f) \xrightarrow{r} Y \hookrightarrow Cyl(f)$ est évidemment homotope à l'identité (car $X \times \{0\}$ est homotope à $X \times [0, 1]$). On a donc montré que $Cyl(f)$ est un rétracte par déformation de Y . De plus on a une injection continue de $i : X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow Cyl(f)$ (dont l'image est fermée) et une factorisation $f = r \circ i$. Par conséquent, toute application $f : X \rightarrow Y$ continue peut se factoriser sous la forme d'une injection fermée et d'une équivalence d'homotopie (qui est même un rétracte par déformation).

4. On définit $H : [0, 1] \times PX \rightarrow PX$, pour $t \in [0, 1]$ et $f \in PX$, par $H(t, f)(u) = f(tu)$. Il est clair que $H(0, f)$ est le chemin constant $u \mapsto x$ et que $H(1, f) = f$ (encore une fois, faire un dessin ne peut pas nuire). Il reste à voir que H est continue. Une application $F : Z \rightarrow PX$ est continue dès que l'application adjointe $\tilde{F} : Z \times [0, 1] \rightarrow X$, définie par $\tilde{F}(z, u) = F(z)(u)$, est continue. En effet, soit $z \in Z$ tel que $F(z)(K) \subset U$ pour un certain ouvert U de X et compact K de I . Alors, $\tilde{F}^{-1}(U) \supset \{z\} \times K$ est un ouvert, donc pour tout $k \in K$, il existe des voisinages $V_k \times I_k$ de (z, k) inclus dans $\tilde{F}^{-1}(U)$. On extrait un recouvrement fini $I_{k_1} \cup \dots \cup I_{k_n}$ de K et on a alors $\bigcap_{i=1}^n V_{k_i}$ qui est un ouvert de Z inclus dans $F^{-1}(W(K, U))$.

L'application $PX \times I \times I \rightarrow X$, définie par $(f, t, u) \mapsto f(tu)$, est continue, car la multiplication $(t, u) \mapsto tu$ est continue ainsi que l'évaluation $PX \times I \rightarrow X$. Ce dernier point provient de la compacité¹¹ de $[0, 1]$. En effet, soit U un ouvert de X contenant $f(t)$ pour $f \in PX$ et $t \in [0, 1]$. On doit montrer qu'il existe un compact $K \subset [0, 1]$, un ouvert $V \subset X$ (avec $f \in W(K, V)$) et un voisinage $V_t \subset [0, 1]$ de $\{t\}$ tels que pour tout $(g, s) \in W(K, V) \times V_t$, on a $g(s) \in U$. Comme f est continue, $f^{-1}(U)$ est un ouvert qui contient t . Il existe donc un voisinage compact¹² $C_t \subset f^{-1}(U)$ de t inclus dans $f^{-1}(U)$. On a alors que $W(C_t, U) \times \mathring{C}_t$ est un voisinage ouvert de (f, t) tel que pour tout $(g, s) \in W(C_t, U) \times C_t$, on ait $g(s) \in U$!

Remarque : si X est métrisable, alors la topologie compacte ouverte correspond à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (donc à la topologie de la convergence uniforme sur PX). Il est alors bien plus facile de montrer les continuités requises en appliquant le critère séquentiel de continuité et l'uniforme continuité de toute fonction continue sur I .

Exercice 3. (*Le bonnet d'âne*) Soit T un triangle dans $\mathbb{R}^2$ (avec son intérieur) et notons p, q, r ses sommets. On appelle bonnet d'âne le triangle dont on a identifié les arêtes de la façon suivante: $[p, q]$ avec $[q, r]$ et $[p, q]$ avec $[p, r]$. Montrer que le bonnet d'âne est un espace contractile (en l'identifiant au cône d'une application du cercle dans lui-même).

Solution 3. On conseille de faire un dessin pour mieux comprendre ! Le bord ∂T du triangle est homéomorphe à un cercle. De plus le cône $C(S^1)$ d'un cercle est homéomorphe à un disque (fermé) et donc à T . On définit une application $f : S^1 \cong \partial T \rightarrow S^1$ qui, envoie chaque segment sur un cercle S^1 en suivant les identifications données dans l'énoncé (en particulier les 3 points p, q, r sont identifiés). En termes de formules mathématiques (pour ceux qui ont besoin d'être rassurés), cela donne: une application $f : \partial T \rightarrow [0, 1](0 \sim 1) \cong S^1$ donnée par

$$- f(t(q - p) + p) = [t] \in [0, 1](0 \sim 1) \text{ sur le segment } [p, q];$$

¹¹ce ne serait pas forcément vrai si on remplaçait $[0, 1]$ par n'importe quel espace topologique...

¹²par voisinage compact de t on entend un compact dont l'intérieur contenant t

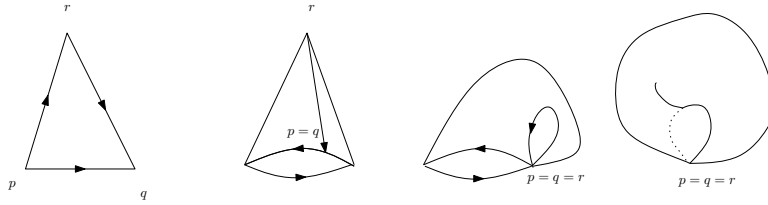


Figure 2: Le bonnet d'âne

- $f(t(r-p) + p) = [t] \in [0, 1](0 \sim 1)$ sur le segment $[p, r]$;
- $f(t(r-q) + q) = [t] \in [0, 1](0 \sim 1)$ sur le segment $[q, r]$.

On vérifie que cela définit bien une application continue du bord du triangle dans le cercle. Il est clair, par construction que le bonnet d'âne est bien $C(f)$. En parcourant le bord du cercle en suivant d'abord le segment $[p, q]$, puis $[q, r]$ puis en revenant à p en suivant le segment $[r, q]$ (attention, on va dans le sens contraire du segment $[p, q]$), on obtient facilement que le degré de f est donné par $\deg(f) = 1 + 1 - 1 = 1$. Donc f est homotope à l'identité et, d'après l'exercice 2, $C(f)$ est homotope à $C(id) = C(S^1) \cong D^2$ qui est contractile !

Remarque : il convient de remarquer que si on avait identifié d'une autre façon les bords du triangle, on aurait pu obtenir des espaces non-contractiles (par exemple une sphère en identifiant tout le bord à un point).

Exercice 4. (*Compactifié d'Alexandroff*) Soit X un espace topologique localement compact. On note $\widehat{X}$ l'espace X auquel on adjoint un point noté ∞ .

1. Montrer que $\widehat{X}$ possède une unique topologie telle que
 - la topologie induite sur X soit la topologie de X
 - les voisinages ouverts de ∞ sont les ensembles de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ pour $K \subset X$ compact.

Démontrer que $\widehat{X}$ est compact.

2. Montrer que $\widehat{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à S^n (Considérer la projection stéréographique).
3. Identifier les espaces $\widehat{\mathbb{C}^*}$ et $\widehat{M}$ où M est la bande de Möbius définie par $M = \mathbb{R}^2/(x, y) \sim (x+1, -y)$.

Solution 4. 1. Il est clair que si une telle topologie existe, elle est unique puisque soit un ouvert U est inclus dans X (donc donné par un ouvert de X), soit c'est un voisinage de ∞ ¹³ et donc donné par la réunion du complémentaire d'un compact et du singleton $\{\infty\}$. Il faut maintenant montrer que cette topologie existe, c'est à dire que les ouverts spécifiés sont stables par réunion quelconques, intersections finies et contiennent le vide (qui est un ouvert de X) et $\widehat{X}$ (qui est le complémentaire du vide). Si les ouverts considérés sont tous dans X , c'est immédiat. Si $U_i = \widehat{X} - K_i$ ($i \in I$) est une famille de voisinages de ∞ , alors $\bigcup U_i = \widehat{X} - \bigcap K_i$ et $\bigcap_{i \in I} K_i$ est compact comme intersection de compacts. Le raisonnement est le même pour une intersection finie d'ouverts de cette forme. Enfin si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X et $(\widehat{X} - K_j)_{j \in J}$ une famille de voisinages de ∞ , alors $\bigcup_{j \in J} \widehat{X} - K_j = \widehat{X} - K$ pour un certain compact K et $(\widehat{X} - K) \cup \bigcup_{i \in I} U_i = (\widehat{X} - K) \cup \bigcup_{i \in I} (U_i \cap K)$. Or $\bigcup_{i \in I} (U_i \cap K)$ est ouvert dans un compact, c'est donc le complémentaire d'un compact K' et la réunion est donc de la forme $\widehat{X} - (K \cup K')$. Un

¹³bien entendu on considère que l'ensemble vide est compact

raisonnement similaire traite le cas des intersections. On a bien prouvé que $\widehat{X}$ admet une unique topologie vérifiant les conditions données.

Montrons que $\widehat{X}$ est séparé. C'est immédiat entre deux points de X car X est localement compact. De plus tout point de x est séparé de ∞ puisque tout point admet un voisinage compact. De plus si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de $\widehat{X}$, alors l'un au moins des ouverts contient ∞ et est donc de la forme $\widehat{X} - K$ pour K compact. Les autres ouverts forment un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un sous-recouvrement fini.

2. Soit $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$. On note N , le pôle nord $(0, \dots, 0, 1) \in S^n$ et $p : S^n - N \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique définie comme $p(x)$ est l'intersection de la demi-droite issue de N passant par x et de l'hyperplan $z_{n+1} = 0$. On trouve

$$p(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

qui est clairement continue sur $S^n - N$. On construit la réciproque de la même manière ce qui donne

$$h(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

qui est clairement continue et l'inverse de p (évident géométriquement et à peine plus dur en faisant un calcul explicite).

Montrons maintenant que $S^n \cong \widehat{\mathbb{R}^n}$. Comme on a un homéomorphisme $S^n - N \cong \mathbb{R}^n$, il suffit de montrer que les voisinages du pôle nord s'identifient avec des complémentaires de compact de $h(\mathbb{R}^n)$. Mais tout voisinage de N contient l'intersection d'une boule ouverte de centre N et de la sphère. Le bord de l'intersection de cette boule avec la sphère est un disque qui se projette sur un disque de rayon R . Il suit que le complémentaire de ce voisinage est un fermé inclus dans (l'image par h) du compact $B(O, R) \subset \mathbb{R}^n$ (donc compact).

3. Comme vu ci-dessus, $\mathbb{C}^*$ est homéomorphe à la sphère S^2 privée des pôles nord $N = (0, 0, 1)$ et sud $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$. Son compactifié d'Alexandroff, est donc la sphère privée des deux pôles à laquelle on rajoute un point O (le point à l'infini) dont les voisinages sont les complémentaires des compacts. Or un compact de $\mathbb{C}^*$ est inclus dans une couronne $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \varepsilon \leq |z| \leq R\}$ (car la distance doit atteindre son maximum et minimum sur un compact). Il suit qu'une base de voisinages de O est donnée par le recollement en leur centres de deux disques (de taille distinctes) dont les bords sont recollés au disque $D(0, R)$ et au disque $D(0, \varepsilon)$. Il est facile de voir que cela identifie $\widehat{\mathbb{C}^*}$ avec le quotient de la sphère obtenu en identifiant les deux pôles N et S .

Par construction du quotient, on a que M est homéomorphe au quotient $[0, 1] \times \mathbb{R}$ par la relation $(0, y) \sim (1, -y)$. Un compact dans M est donc inclus dans l'image par le quotient d'une bande $[0, 1] \times [-R, R]$. Or son complémentaire $M \setminus p([0, 1] \times [-R, R])$ (en notant $p : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow M$ l'application quotient) est homéomorphe au complémentaire d'un disque euclidien de centre 0 et de rayon 2 (faire un "dessin"). De même que pour la compactification de $\mathbb{R}^2$, la compactification de M est donc obtenue en recollant un disque à $M \setminus p([0, 1] \times [-R, R])$ sur son bord. C'est à dire que $\widehat{M}$ est homéomorphe au quotient de $[0, 1] \times [-R, R]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(0, y) \sim (1, -y)$ et $(x, R) \sim (x', -R)$ pour tout $x, x' \in [0, 1]$ (autrement dit on a indentifié les bords de longueur R du rectangle à un seul et unique point, le point ∞). On en déduit un homéomorphisme entre $\widehat{M}$ est le quotient de la sphère de dimension 3 sur laquelle on identifie les points antipodaux, c'est à dire que $\widehat{M} \cong \mathbb{R}P_2$ le plan projectif réel de dimension 2 qui est également homéomorphe au quotient du disque obtenu en identifiant les points antipodaux de son bord.

Exercice 5. (boucles, bouquet de cercles ...) On considère les espaces topologiques quotients $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ par le sous-espace $\mathbb{Z}$ et

$$B = S^1 / (\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n), n \in \mathbb{N}^*\}),$$

ainsi que les sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion R_1 des cercles de rayon $n \in \mathbb{N}$ et tangents en $(0, 0)$ à l'axe $y = 0$, la réunion R_2 des cercles de rayon¹⁴ $1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et tangents en $(0, 0)$ à l'axe $x = 0$ et enfin l'espace $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$ donné par le recollement de $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ sur le point $Y = \{pt\}$ par l'unique application $f : F \rightarrow \{pt\}$ où F est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle). Dire lesquels parmi ces espaces sont homéomorphes entre eux.

Solution 5. Il faut bien faire attention que l'espace est le quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-espace $\mathbb{Z}$ (et non pas par la relation d'équivalence donnée par le sous-groupe $\mathbb{Z}$!) On a que A et X sont homéomorphes entre eux (ils forment ce qu'on appelle un bouquet dénombrables de cercles) et que B et R_2 sont homéomorphes entre eux (ce sont les "boucles hawaïennes"). Enfin R_1 n'est homéomorphe à aucun autre espace et de plus les boucles hawaïennes ne sont pas homéomorphes à un bouquet de cercles. Pour voir cela, commençons par montrer que R_1 et R_2 ne sont pas homéomorphes (c'est assez évident intuitivement puisque un voisinage de $(0, 0)$ dans R_2 contient une infinité de cercles alors que ce n'est pas le cas pour R_1). Comme R_1 est non-borné dans $\mathbb{R}^2$, il n'est pas compact et il suffit de montrer que R_2 est compact pour. C'est évident si on a déjà montré que R_2 est homéomorphe à B puisque B est le quotient d'un compact par le fermé $\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n), n \in \mathbb{N}^*\}$ qui est la réunion d'une suite convergente et de sa limite. Bien-sûr on peut aussi facilement vérifier que toute suite (x_n) de R_2 (qui est métrisable car inclus dans $\mathbb{R}^2$) admet une valeur d'adhérence, car soit une telle suite est incluse dans un nombre fini de cercles (dont la réunion est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc admet une valeur d'adhérence) soit elle admet une sous suite qui converge vers $(0, 0)$.

Montrons que R_1 n'est pas homéomorphe à A . L'idée est que $R_1 \subset \mathbb{R}^2$, donc est métrisable. Il suffit donc de montrer que A ne l'est pas. Rappelons que si un espace est métrisable il vérifie que tout point admet une base dénombrable de voisinages ouverts¹⁵ (par exemple donnée par les boules centrée en ce point de rayon $1/n$). Montrons que la classe du point $[0] \in A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'admet pas de telle base de voisinage. On note $\pi : \mathbb{R} \rightarrow A$ l'application quotient. Par définition de la topologie quotient, une base d'ouverts de $[0]$ est donnée par les $\pi(\coprod_{n \in \mathbb{Z}}]n - \epsilon_n, n + \epsilon_n[)$ où les $0 < \epsilon_n < 1/2$ forment une suite quelconque (en particulier les intervalles $]n - \epsilon_n, n + \epsilon_n[$ sont disjoints). Soit maintenant une famille dénombrable $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de voisinages ouverts de $[0]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\pi^{-1}(V_n)$ est un voisinage ouvert saturé de $\mathbb{R}$ qui contient n , donc, il existe $\delta_n > 0$ tel que l'intervalle ouvert $I_n =]n - \delta_n, n + \delta_n[$ soit *strictement* inclus dans $(\pi^{-1}(V_n)) \cap]n - 1/2, n + 1/2[$. Mais alors l'ouvert $\coprod_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ est un ouvert saturé de $\mathbb{R}$ et donc $\pi(\coprod_{n \in \mathbb{Z}} I_n)$ est un ouvert de A qui ne contient aucun V_n par construction (puisque $V_n \cap]n - 1/2, n + 1/2[$ n'est pas inclus dans I_n). Par conséquent la classe de $[0] \in A$ n'admet pas de base de voisinages dénombrables et donc A n'est pas métrisable.

Il reste à montrer¹⁶ les homéomorphismes évoqués ci-dessus. L'homéomorphisme ϕ entre A et $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ découle de l'homéomorphisme entre $[0, 1]/(0 \sim 1)$ et S^1 (donné par l'exponentielle comme dans l'exercice 4) sur les tores) en envoyant par exemple un élément $x \in [n, n + 1]$ sur l'élément correspondant à $x - n \in [0, 1]$ du cercle indicé par n dans X . Pour vérifier que cette application est bien un homéomorphisme, la seule (toute petite) difficulté réside alors dans les voisinages de la classe de $0 \in X$. On vérifie comme ci-dessus qu'une base de tels voisinages est donnée par une réunion (disjointe) d'arcs de cercles de longueur θ_n quelconques contenant pt (avec exactement un arc pour chaque cercle). Comme une base de voisinage de $[0]$ dans A est donnée par $\pi(\coprod]n - \tau_n, n + \tau_n[)$ (pour $0 < \tau_n < 1/2$) on obtient facilement que l'application ϕ est bien un homéomorphisme.

Enfin pour montrer que R_2 et B sont homéomorphes, on procède comme entre A et R_1 . Et on vérifie cette fois qu'une base de voisinages de $\pi(1) \in B$ est donnée par l'image d'une famille d'intervalles contenant tous les points $\{1/n\}$ dès que n est assez grand et de petits arcs de cercles centrés en les autres points de la forme $1/n$. Similairement une, base de voisinages de $(0, 0)$ dans R_2 est donnée par la réunion d'une famille d'arcs de cercles appartenant à un nombre fini de cercles de rayon $1/n$ et tous les cercles de rayon $1/n$ n'appartenant pas à cette famille.

¹⁴on l'appelle parfois espace des boucles hawaïennes

¹⁵dasn les ouvrages anglophones, un espace vérifiant cette propriété est appelé first countable

¹⁶on se contente de donner une ébauche de preuve et de laisser les détails au lecteur

Exercice 6. *Un collage classique* Montrer que S^3 est obtenue en recollant deux "tores pleins" $D^2 \times S^1$ au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \xrightarrow{\text{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

Indication: On identifiera S^3 au sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et les tores pleins aux sous-ensembles définis par $|z_1| \leq |z_2|$ et $|z_1| \geq |z_2|$.

Solution 6. On identifie D^2 avec le disque unité de $\mathbb{C}$ et S^1 avec son bord. Soit $T_1 := \{(z_1, z_2) \in S^3, \text{ tel que } |z_1| \leq |z_2|\}$. Alors de l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, on déduit que pour tout $(z_1, z_2) \in T_1$, on a $|z_1|^2 \leq 1/2$. De plus, z_2 s'écrit sous la forme $z_2 = \sqrt{1 - |z_1|^2} \exp(i\theta)$ pour un certain complexe de module 1 $\exp(i\theta)$. Soit alors $f_1 : D^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'application définie par

$$f_1(z, \exp(i\theta)) = \left(\frac{z}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2 - |z|^2}{2}} \exp(i\theta) \right).$$

Il est clair que f_1 est continue et que son image est $f_1(D^2 \times S^1) = T_1$. On vérifie sans mal que f_1 est injectif. Comme $D^2 \times S^1$ est compact (et $\mathbb{C}^2$ séparé), il suit que f_1 est un homéomorphisme. De même, on a un homéomorphisme $f_2 : D^2 \times S^1 \rightarrow T_2$, où $T_2 = \{(z_1, z_2) \in S^3, \text{ tel que } |z_2| \leq |z_1|\}$ défini par

$$f_2(z, \exp(i\phi)) = \left(\sqrt{\frac{2 - |z|^2}{2}} \exp(i\phi), \frac{z}{\sqrt{2}} \right).$$

Le bord de T_1 s'identifie à $S^1 \times S^1$ via l'application $(\exp(i\phi), \exp(i\theta)) \mapsto (\frac{\exp(i\phi)}{\sqrt{2}}, \frac{\exp(i\theta)}{\sqrt{2}})$ qui est la restriction de f_1 au bord de $D^2 \times S^1$. De même pour le bord de T_2 . On peut donc effectuer le recollement $T_1 \cup_{id} T_2$ de T_1 sur T_2 par l'application $\partial T_1 \cong S^1 \times S^1 \xrightarrow{id} S^1 \times S^1 \cong \partial T_2 \subset T_2$.

On a déjà applications $f_1 : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ et $f_2 : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ qui sont continues. Mais les restrictions à $S^1 \times S^1$ de f_1 et f_2 coïncident. D'après l'exercice 2, question 2, on en déduit une application continue F du recollement $D^2 \times S^1 \cup_{id_{S^1 \times S^1}} D^2 \times S^1$ dans S^3 , qui est surjective, puisque par définition, tout élément de S^3 est soit dans T_1 , soit dans T_2 (ou même les deux). Par compacité de $D^2 \times S^1 \cup_{id_{S^1 \times S^1}} D^2 \times S^1$ (ce qui découle encore de l'exercice 2 car $S^1 \times S^1$ est fermé et $D^2 \times S^1$ compact), il suffit maintenant de montrer que F est injective pour conclure. Mais si $F(u) = F(y)$ alors ou bien u, y sont tous deux dans le même facteur $D^2 \times S^1$ et alors F est soit f_1 , soit f_2 en tout cas injectif, ou bien ils sont dans deux facteurs distincts. Auquel cas, ils ne peuvent coïncider que si ils sont dans l'image de $S^1 \times S^1$ et $F_{S^1 \times S^1}$ est encore injectif.

Exercice 7. *Configurations de 3 points distincts dans $\mathbb{C}$*

1. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ se rétracte par déformation sur l'ensemble X formé de la réunion des cercles de centre 0 et 1 et de rayon 1/2.
2. Montrer que $C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq z_2\}$ se rétracte par déformation sur S^1 identifié à l'ensemble des couples $(0, u)$ pour $u \in S^1$.
3. Montrer que $C_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \text{ distincts}\}$ se rétracte par déformation sur $S^1 \times X$ identifié à l'ensemble des triplets $(0, u, uv)$ pour $u \in S^1$ et $v \in X$.

Solution 7. 1. L'ensemble X , réunion des des cercles de centre 0 et 1 et de rayon 1/2 est souvent appelé "figure 8". La rétraction est décrite sur le dessin ci-contre. Plus précisément, dans l'intérieur de chaque disque époinché, r_1 est la projection radiale sur le cercle (c'est à dire $r_1(z) = z/2|z|$ dans le premier disque et $r_1(z) = (z - 1)/2|z - 1| + 1$ pour le deuxième). Sur le demi plan $\text{Re}(z) < 0$, on prend encore la projection radiale sur le cercle de centre 0 (c'est bien compatible avec la règle précédente à l'intérieur du disque !) et de même

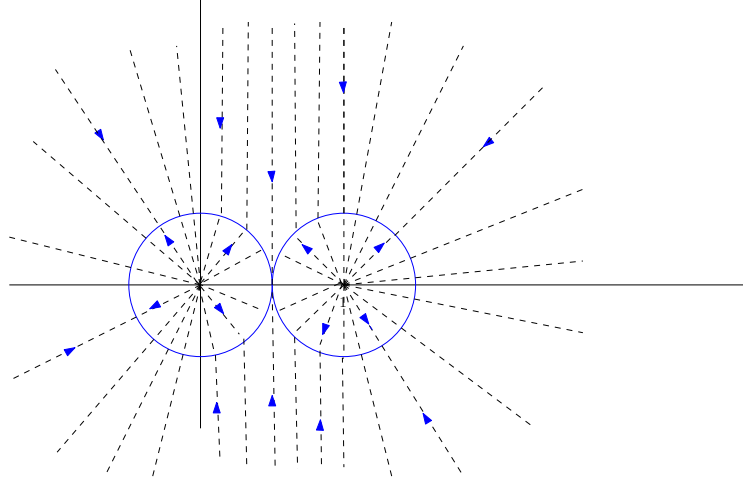


Figure 3: La rétraction de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sur la figure 8.

sur le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 1$ en projetant radialement sur le cercle de centre 1. Sur la partie $B := \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, |z| > 1/2 \text{ et } |z - 1| > 1/2\}$ (c'est à dire sur la partie où on a pas encore défini la rétraction), on définit r_1 comme la projection verticale sur la figure 8, c'est à dire que $r_1(z)$ est envoyé sur le point de X de même abscisse que z (et dont l'ordonnée a le même signe). Comme les projections radiales et verticales sont continues, la seule à montrer est la continuité de r_1 sur les axes $\operatorname{Re}(z) = 0, 1/2$. Mais sur ces axes, la projection radiale coïncide avec la projection verticale. Par conséquent, $r_1 : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow X$ est bien définie et continue. De plus $r_1 \circ i = \operatorname{id}$ où $i : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est l'inclusion.

Il reste à montrer que $i \circ r$ est homotope à l'identité. Pour cela on définit $H_1 : [0, 1] \times \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par la formule $H_1(t, z) = tr_1(z) + (1 - t)z$. Il est clair que $H_1(t, z)$ est continue et à valeur dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ car pour tout z , le segment $[z, r_1(z)]$ est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par construction. Comme $H_1(0, z) = z$ et $H_1(1, z) = r_1(z)$ on a obtenu l'homotopie souhaitée !

2. On identifie encore S^1 avec le sous-espace de $\mathbb{C}$ des éléments de norme 1. On définit $r_2 : C_2 \rightarrow S^1$ par la formule $r_2(z_1, z_2) = \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}$ qui est bien définie puisque $z_2 \neq z_1$ et continue. Soit $i : S^1 \rightarrow C_2$ l'injection $i(u) = (0, u)$. Alors $r_2 \circ i = \operatorname{id}$ et il reste à montrer que $i \circ r_2$ est homotope à l'identité de C_2 . Soit $H_2(t, (z_1, z_2)) = \frac{1}{1 - t + t|z_2 - z_1|} ((1 - t)z_1, z_2 - tz_1)$. Il est clair que H_2 est bien définie, continue et à valeur dans C_2 si $z_2 \neq z_1$. Comme $H_2(1, -) = i \circ r_2$ et $H_2(0, -) = \operatorname{id}_{C_2}$; on a montré que S^1 est un rétracte par déformation de C_2 .
3. On va combiner les deux constructions précédentes. Si $(z_1, z_2, z_3) \in C_3$, alors $z_2 - z_1 \neq 0$, $z_3 - z_1 \neq 0$ et $z_3 - z_1 / (z_2 - z_1) \neq 1$. On en conclut que

$$r_3(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}, r_1 \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \right) = \left(r_2(z_1, z_2), r_1 \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \right)$$

est dans $S^1 \times X$ et que r_3 est continue sur C_3 . Soit $j : S^1 \times X \rightarrow C_3$ l'inclusion continue $i(u, v) = (0, u, uv)$; on vérifie sans peine que j identifie bien $S^1 \times X$ à un sous-espace de C_3 . De plus $r_3 \circ j$ est l'identité de $S^1 \times X$. Il reste à voir que $j \circ r_3$ est homotope à l'identité. Pour cela on définit l'application $H_3 : [0, 1] \times C_3 \rightarrow C_3$ par

$$H_3(t, (z_1, z_2, z_3)) = \frac{1}{1 - t + t|z_2 - z_1|} \left((1 - t)z_1, z_2 - tz_1, (z_2 - z_1)H_1 \left(t, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + (1 - t)z_1 \right) \right).$$

On vérifie que H_3 prend ses valeurs dans C_3 car, pour tout t , $H_1(t, -) \neq 0, 1$. La continuité est immédiate (au vu des questions précédentes). Enfin $H_3(0, (z_1, z_2, z_3)) = (z_1, z_2, z_3)$ et $H_3(1, -) = r_3$.