Corrigé de la Feuille de TD 4 de Revêtements et Groupe Fondamental
morphismes de revêtements, revêtements universels

Exercice 1. (*Van Kampen pour les espaces simplement connexes*) Soit X un espace topologique et U, V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V$ est connexe, non-vide. On va montrer que si U, V sont simplement connexes, il en est de même de X.

1. Soit $p : E \to X$ un revêtement de E tel que les restrictions $E_{|A}$ et $E_{|B}$ soient triviales. Montrer que E est trivial.
2. Conclure.

Solution 1. Remarquons que U, V sont connexes puisque simplement connexes. Il suit que X est nécessairement connexe.

1. Soit $\phi_U : E_{|U} \overset{\simeq}{\to} U \times F$ un homéomorphisme donné par une trivialisation de $E_{|U}$ (donc $p_{|U} = \pi \circ \phi_U$). Et de même soit $\phi_V : E_{|V} \overset{\simeq}{\to} V \times F'$ une trivialisation de $E_{|V}$. Puisque ϕ_U, ϕ_V commutent à la projection dans X, pour tout $b \in U \cap V$, la composée $\{b\} \times F \overset{\phi_V \circ \phi_U^{-1}}{\longrightarrow} \{b\} \times F'$ est un isomorphisme de F sur F'. Par connexité de $U \cap V$, cet isomorphisme ne dépend pas du point b (en effet l'image de toute assiette $(U \cap V) \times \{f\}$, qui est connexe, par l'application continue $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ est incluse dans une composante connexe de $(U \cap V) \times F'$, c'est à dire une assiette $(U \cap V) \times \{f'\}$). On note $\tilde{\sigma} : F \overset{\simeq}{\to} F'$ l'isomorphisme ainsi obtenu et soit $\sigma := V \times F' \to V \times F$ l'application $(x, f') \mapsto (x, \tilde{\sigma}^{-1}(f'))$. C'est un isomorphsime de revêtements et donc la composée $\psi_V : E_{|V} \overset{\sigma \circ \phi_V}{\to} V \times F$ est une trivialisation de $E_{|V}$. Par construction, les restrictions $\psi_V : E_{|U \cap V} \to (U \cap V) \times F$ et $\phi_U : E_{|U \cap V} \to (U \cap V) \times F$ sont identiques. Il suit qu'elles définissent une application $\Phi : E \to X \times F$ donnée par ϕ_U sur $E_{|U}$ et ψ_V sur $E_{|V}$. Par définition Φ est un homéomorphisme local, et surjectif et injectif par construction (puisque tout point e est soit dans $E_{|U}$, soit dans $E_{|V}$). Ainsi Φ est un homéomorphisme et donc une trivialisation globale de E.
2. Soit maintenant E un revêtement quelconque de X. Par hypothèse, $E_{|U}$ et $E_{|V}$ sont triviaux car U, V sont simplement connexes. Alors E est trivial d'après la question précédente, et donc X est simplement connexe.

Exercice 2. (*simple connexité des sphères*) Déterminer pour quelles valeures n, la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe.

Solution 2. (*simple connexité des sphères*) S^0 n'est pas connexe, donc n'est pas simplement connexe. On a vu en cours que S^1 n'est pas simplement connexe (par exemple il est revêtu non-trivialement par $\mathbb{R}$). En revanche, si $n \geq 2$, S^n est obtenu en recollant deux disques D^n le long d'une couronne centrée sur l'équateur, qui est connexe. Comme des disques sont simplement connexes car contractiles, il suit de l'exercice 1 que S^n est simplement connexe.

Exercice 3. (*Automorphismes de revêtements*)

1. Déterminer tous les automorphismes du revêtement $S^1 \to S^1$ donné par $z \mapsto z^n$ $(n \geq 1)$. Est-ce un revêtement galoisien ?
2. Montrer que la projection canonique $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ est un revêtement et calculer son groupe d'automorphismes.

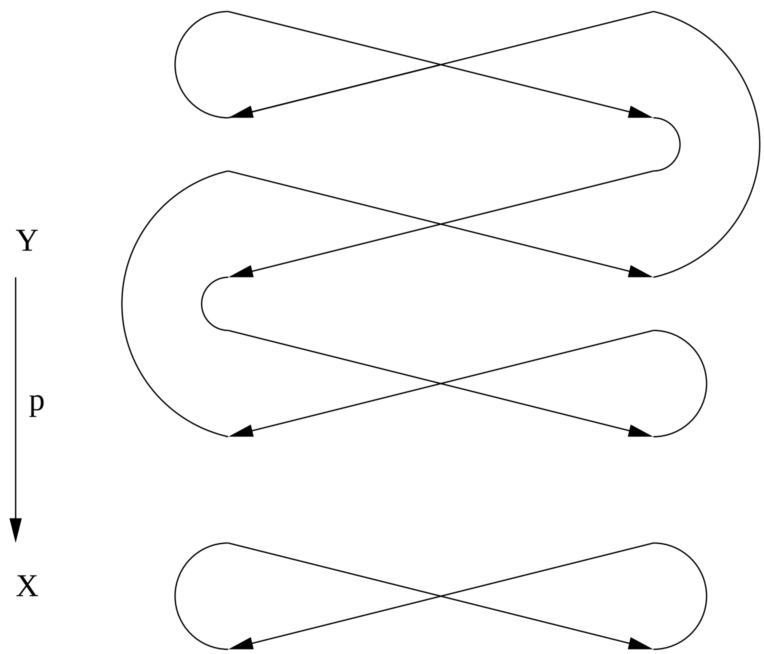


Figure 1: Le revêtement $p : Y \to X$.

3. Soient X et Y les graphes représentés ci-dessous et $p : X \to Y$ la projection "verticale" donnée par la figure:

   (a) Déterminer les automorphismes du revêtement p. Est-ce un revêtement galoisien ?

   (b) Construire un revêtement $\widehat{Y}$ de degré 2 de Y tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de X et de même, constuire un revêtement $\widehat{X}$ de degré 2 de X tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de degré 3 de $\widehat{X}$.

Solution 3. Commençons par la remarque suivante : si $p : E \to B$ est un revêtement avec E connexe et B séparé et $x \in E$, l'application $\phi : Aut(p) \to p^{-1}(p(x))$, donnée par $\phi(f) = f(x)$ est injective. En effet si $f, g \in Aut(p)$, alors $A = \{z \in E, f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E. A est aussi ouvert car p est un homéomorphisme local. Donc $A = E$.

1. Si $zeta$ est une racine $n$ième de 1, l'application $z \mapsto \zeta z$ est un automorphisme de revêtement. On obtient ainsi n morphismes de revêtements. Comme $\mathbb{S}^1$ est connexe et comme le revêtement est de degré n, on a bien tous les automorphismes et le revêtement est galoisien.

2. On a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$. Or $\mathbb{S}^1$ est compact, $\{\pm 1\}$ agit librement (car $z \neq -z$ pour tout $Z \in \mathbb{S}^n$) et proprement (car $\{\pm 1\}$ est fini), donc p est bien un revêtement. D'après le cours, $Aut(p) = \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   (a) Soient x_1, x_2 et x_3 les trois préimages du point double, numérotées de haut en bas sur le dessin. Soit f un automorphisme de p. Alors $f(x_1) \in \{x_1, x_2, x_3\}$. Soit $A \subset X$ la boucle de gauche ($A \simeq \mathbb{S}^1$). Alors $Y_A \to A$ est la somme disjointe d'un revêtement de degré 1 (contenant x_1) et d'un revêtement connexe de degré 2 (contenant x_2 et x_3). Comme f induit un automorphisme de Y_A, il induit une bijection de l'ensemble de ses composantes connexes, mais les deux composantes connexes ne sont pas isomorphes en tant que revêtement de A (puisque leurs degrés sont différents). Donc f stabilise chacune des composantes connexes de Y_A, donc $f(x_1) = x_1$. Comme Y est connexe, $f = id_Y$. Le revêtement n'est donc pas galoisien.

(b) Soit $\tau = (1,2) \in \mathfrak{S}_6$ et $\tau' = (1,3) \in \mathfrak{S}_6$. Considérons le graphe $\widehat{Y}$ suivant où l'ensemble des sommets est $\mathcal{V} = \mathfrak{S}_6$ et pour tout $z \in \mathcal{V}$ on a une arête orientée reliant z à $z\tau$ et une reliant z à $z\sigma$. On fait agir $\mathfrak{S}_6$ sur $\widehat{Y}$ par translation à gauche, alors on obtient un revêtement galoisien $\widehat{Y} \to \widehat{Y}/\mathfrak{S}_6 \simeq X$. On vérifie que $\widehat{Y}/ <\tau> \simeq Y$, ce qui fournit un revêtement galoisien de degré 2 $\widehat{Y} \to Y$. On pose $\widehat{X} = \widehat{Y}/ <\sigma>$ où $\sigma = (1,2,3)$.

Exercice 4. (*Revêtements et boucles hawaïennes*) On considère les boucles hawaïennes $\mathbb{H} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, c'est à dire la réunion $\mathbb{H} = \bigcup_{n>0} C_n$ des cercles C_n ($n \geq 1$) de diamètre sur l'axe réel $x = 0$ de longueur $1/n$. On note aussi $\mathbb{H}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{H},\ y \geq 0\}$ et $\mathbb{H}_- := \{(x,y) \in \mathbb{H},\ y \leq 0\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$ sont simplement connexes. $\mathbb{H}$ est-il simplement connexe ?

2. Pour tout $n \geq 1$, construire un revêtement $p_n : E_n \to \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}$ tel que la restriction $E_{n|C_n}$ ne soit pas trivial.

3. On note $E = \coprod_{n>0} E_n$ la réunion disjointe des E_n et $p : E \to \mathbb{H}$ l'application induite par les p_n. Montrer qu'il existe un revêtement *trivial* T de $\mathbb{H}$ tel que E soit un revêtement de T, mais que E n'est *pas* un revêtement de $\mathbb{H}$.

4. Démontrer que les restrictions $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_+)}$ et $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_-)}$ sont des revêtements de $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$, qui sont de plus triviaux.

Solution 4.

1. Considérons $\mathbb{H}_+$ ($\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$ sont homéomorphes). Définissons $H(t, \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}e^{2i\pi\theta}) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}e^{2i\pi t\theta}$. Alors H est bien continue (la seule difficulté est en $(0,t_0)$, mais $H^{-1}(B(0,\epsilon)) \supset (B(0,\epsilon) \cap \mathbb{H}_+) \times [0,1]$), et $H(0,-) = 0$ et $H(1,-) = id$.
   On déduit le fait que $\mathbb{H}$ ne soit pas simplement connexe de la question 2.

2. Soit $U_n = \mathbb{H}\backslash\{0, 1/n\}$ et $V_n = C_n\backslash 0$. Alors $U_n \cap V_n$ a deux composantes connexes A_n et B_n. Soit $E_{U_n} = U_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $E_{V_n} = V_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On identifie $E_{U_n|A} = A \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = E_{V_n|A}$ et $E_{U_n|B} = B \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{id\times(z\mapsto z+1)}{\simeq} B \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = E_{V_n|B}$ pour recoller E_{U_n} et E_{B_n} en un revêtement E_n vérifiant les propriétés voulues.

3. $E \to \mathbb{H}$ n'a pas de trivialisation au voisinage de 0puisque pour tout voisinage U de 0 dans $\mathbb{H}$, il existe n tel que $C_n \subset U$. Soit $T = \coprod_{n>0}$, alors $E \to T$ est un revêtement.

4. $E_{n|\mathbb{H}_+} \to \mathbb{H}_+$ est un revêtement, nécessairement trivial puisque $\mathbb{H}^+$. Donc $E_{|\mathbb{H}^+}$ est un revêtement trivial en tant que somme disjointe de revêtements triviaux.

Exercice 5. (*Quelques revêtements universels*)

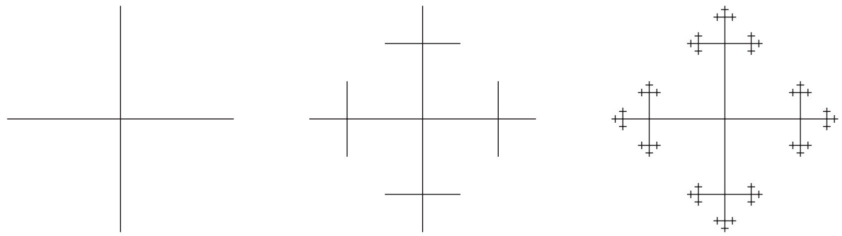
1. Déterminer les revêtements universels des sphères S^n ($n \geq 1$), de $\mathbb{C}^*$, des espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$, du tore $S^1 \times S^1$, de la bande de Möbius et la bouteille de Klein.

2. (*le revêtement universel du "huit"*) On construit une partie $A_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ de $\mathbb{R}^2$ par récurrence de la manière suivante (voir Figure 1).

   - L'ensemble A_0 est formé du seul point 0.
   - L'ensemble A_1 est formé des 4 segments $[-1,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1,1]$.
   - On a un graphe formé de 4 arètes, deux horizontales et deux verticales. A distance 1/3 de l'extrémité libre de chacune, on rajoute le segment de longueur 2/3 dont l'arète est la médiatrice.
   - Etape n. A distance $1/3^n$ de l'extrémité libre de chaque arête, on ajoute un segment de longueur $2/3^n$ dont notre arête est la médiatrice.

   On construit ainsi une partie de $\mathbb{R}^2$ formée de segments horizontaux et verticaux se coupant orthogonalement. On munit l'ensemble A_∞ de la distance d telle que

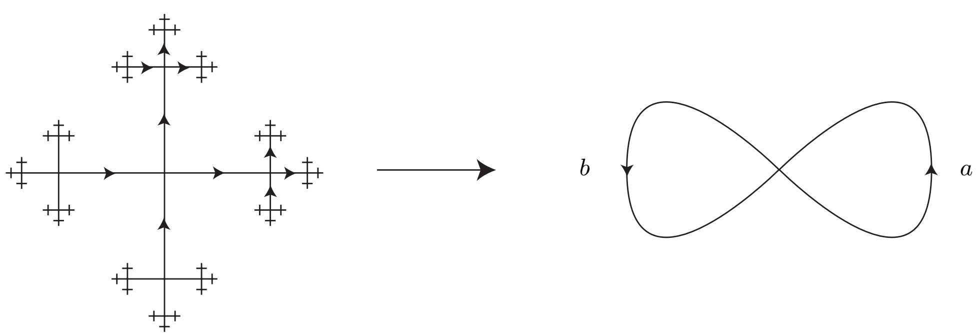
- Chaque arête est isométrique au segment $[0,1]$.
- La distance entre deux sommets est la longueur d'un chemin (sans aller-retour) dans A_∞ joignants ces deux sommets.



Étape 1 Étape 2 Étape n

(a) Montrer que A_∞ muni de la distance d est un espace métrique connexe et simplement connexe.

(b) On oriente toutes les arètes: les verticales de bas en haut et les horizontales de gauche à droite. On définit une application p de $\tilde{X}$ sur le huit en envoyant chaque arête horizontale (resp. verticale) sur la boucle a (resp. b) par un homéomorphisme (voir Figure 2). Montrer que p est le revêtement universel du huit.



Solution 5. 1. Si $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe d'après l'exercice 2, donc c'est son propre revêtement universel. Le revêtement universel de $\mathbb{S}^1$ est $\mathbb{R}$.
L'application exponentielle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement et $\mathbb{C}$ est contractile, donc le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ est $\mathbb{C}$.
Si $n \geq 2$ le revêtement universel de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{S}^n$ (puisque $mathbbS^n$ est simplement connexe).
On a un revêtement $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, donc c'est un revêtement universel.
On a aussi des revêtements de la bande de Moebius et de la bouteille de Klein par $\mathbb{R}^2$ (d'après TD 3 exercice 4), qui est simplement connexe, donc c'est leur revêtement universel.

2. Soient $x_1, x_2 \in A_\infty$. Il existe n tel que $x_1, x_2 \in A_n$, et A_n est un graphe fini connexe, donc connexe par arc, d'où un chemin dans A_n allant de x_1 à x_2.
Soit $f : E \to A_\infty$ un revêtement. Soit $f_n : E_n \to A_n$ sa restriction à A_n. Alors comme A_n est un arbre, il est contractile donc f_n est trivial. On peut ainsi construire par récurrence sur n des sections $s_n : A_n \to E_n$ qui vérifient $s_{n+1|A_n} = s_n$. La famille s_n induit une section $A_\infty \to E$, qui

est bien continue puisque tout $x \in A_\infty$ a un voisinage ouvert dans un A_n.

Identifions le 8 à $\{a,b\} \times [0,1]/(a,0) \sim (a,1) \sim (b,0) \sim (b,1)$. L'application p est un revêtement trivial au dessus de l'image U de $\{a,b\}\times]0,1[$ et de l'image V de $\{a,b\} \times ([0,1/3[\cup]2/3,1])$ et (U,V) recouvrent le 8 ; p es donc bien un revêtement. Comme A_∞ est simplement connexe, c'est un revêtement universel.

Exercice 6. (*Classifications des revêtements de quelques esapces classiques*) Décrire tous les revêtements connexes (à isomorphisme de revêtements près)

1. de S^1
2. de $\mathbb{R}P^2$
3. de $S^1 \times S^1$
4. de la bouteille de Klein.
5. du graphe en 8, avec 2 et 3 feuillets.

Solution 6. Rappelons le résultat suivant du cours: si X est le revêtement universel d'un espace (connexe) B, alors, tout revêtement connexe de B est (isomorphe à) un quotient de X par un sous-groupe du groupe fondamental $\mathrm{Aut}_B(X)$. C'est à dire de la forme $X/H \to X/\mathrm{Aut}_B(X) \cong B$. De plus, deux revêtements X/H et X/K sont isomorphes si et seulement si les groupes H et K sont conjugués dans $\mathrm{Aut}_B(X)$ (c'est à dire qu'il existe $g \in \mathrm{Aut}_B(X)$ tel que $H = gKg^{-1}$). En particulier, si $\mathrm{Aut}_B(X)$ est abélien, deux sous-groupes distincts induisent forcément des revêtements *non*-isomorphes, et de plus, tous les revêtements sont galoisiens (car tous les sous-groupes sont distingués)

Rappelons aussi que si G est un groupe agissant continuement, proprement et librement sur un espace localement compact X (par exemple un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$), alors le revêtement quotient $X \mapsto X/G$ est galoisien et $\mathrm{Aut}_X(X/G) = G$.

On va utiliser les revêtements universels obtenus dans l'exercice 5.

1. Le revêtement universel $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ de S^1 est donné par l'exponentielle $t \mapsto \exp(2i\pi t)$. Un sous groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que les revêtements connexes de S^1 à isomorphismes près sont donnés par les quotients $\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons que $\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \cong S^1$ et que le revêtement $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \cong S^1$ est donné par l'application $t \mapsto \exp(2i\pi t/n)$. On en déduit que le revêtement $S^1 \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ est l'application $z = \exp(2i\pi t/n) \mapsto \exp(2i\pi t) = z^n$. On a obtenu que tout revêtement connexe de S^1 est isomorphe au revêtement universel (de fibre $\mathbb{Z}$), ou au revêtement $z \mapsto z^n$ de degré n de S^1 sur lui même (ces revêtements sont bien non-isomorphes puisqu'ils n'ont pas le même nombre de fibres).

2. L'espace $\mathbb{R}P^2$ a pour revêtement universel $S^2 \to S^2/\{\pm\,\mathrm{id}\} \cong \mathbb{R}P^2$. Il suit que tout revêtement connexe de $\mathbb{R}P^2$ est le revêtement trivial ou le revêtement universel.

3. L'application $e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$ donnée par $(s,t) \mapsto \big(\exp(2i\pi s), \exp(2i\pi t)\big)$ est le revêtement universel du tore $S^1 \times S^1$ qui a donc pour groupe fondamental $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il reste à déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (comme $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est abélien, on sait que tous les sous-groupes donneront des revêtements non-isomorphes et galoisiens). Pour cela considérons la projection $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sur le premier facteur. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, alors $p(H)$ est un sous-groupe de $p(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ donc de la forme $n\mathbb{Z}$.Soit $x \in H$ tel que $p(x) = n$; c'est à dire que x sécrit sous la forme $x = (n,a) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. De même l'intersection de H avec le deuxième facteur $\{0\} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\{0\} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ donc de la forme $m\mathbb{Z}$. Enfin, pour tout $h \in H$, $p(h) \in p(H)$ donc est de la forme $p(h) = n.p_h$ et donc $h - p_h(n.a) \subset H$ est inclus dans le noyau de p, donc de la forme $(0, mk)$. On a montré (les réciproques sont triviales) que H est

le sous-groupe engendré par (n, a) et $(0, m)$. On peut de plus, si m est non nul, supposer que $a < m$ (en regardant $(n, a + km) \in H$ pour un certain k). On conclut que les sous-groupes de H sont soit de la forme $(a, b)\mathbb{Z}$, soit de la forme $(n, a)\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$ où $n, m > 0$ et $a < m$.

Dans le premier cas, c'est à dire $H = (a, b)\mathbb{Z}$, on obtient[1] le revêtement universel (si $a = b = 0$) ou le revêtement par un cylindre $S^1 \times \mathbb{R} \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(a, b)\mathbb{Z} \to (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$ qui peuvent sécrire sous la forme $(z, t) \mapsto (z^a, z^b \exp(2i\pi t))$ (si $a \neq 0$) ou sous la forme $(z, t) \mapsto (z^a \exp(2i\pi t), z^b)$ (si $b \neq 0$) [2].

Dans le deuxième cas, celui où $H = (n, a)\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$avec $n, m > 0$ et $a < m$, on obtient des revêtements du tore par lui-même: $S^1 \times S^1 \cong (\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})/(n, a)\mathbb{Z}\oplus m\mathbb{Z} \to (\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})/(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$ qui sont de la forme $(z, w) \mapsto (z^n, z^a w^m)$ et ont $\frac{nm}{\mathrm{pgcd}(n,m)}$-feuilles.

4. La bouteille de Klein K est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par le sous-groupe discret $G = \langle t, h\rangle$ des isométries de $\mathbb{R}^2$ engendré par la translation $t(x, y) = (x + 1, y)$ et la symétrie glissée $r(x, y) = (-x, y + 1)$ (cf la feuille de TD 3). Les revêtements (à isomorphisme près) de K sont donc donnés par les quotients de $\mathbb{R}^2$ par les sous-groupes de G. On a la relation $trt = r$ et tout élément de G sécrit de manière unique sous la forme $r^n t^m$ et on a la relation $r^n t^m \cdot r^p t^q = r^{n+p} t^{q+(-1)^p m}$. On remarque que $rtr^{-1} = t^{-1}$ d'où il suit que le sous-groupe (des translations horizontales de longueur entière) $\langle t\rangle \subset G$ est distingué. Bien-sûr, $\langle t\rangle \cong \mathbb{Z}$ et le sous groupe-quotient $G/\langle t\rangle$ est isomorphe au sous-groupe $\mathbb{Z} \cong \langle r\rangle \subset G$ (vu l'uncité de l'écriture $r^n t^m$ d'un élément de G). E particulier, on a une suite exacte courte de groupes $\mathbb{Z} \cong \langle t\rangle \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/\langle t\rangle \cong \mathbb{Z}$ et on note $p : G \to G/\langle t\rangle$ l'application quotient. On montre comme dans le cas de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ci-dessus[3] que tout sous-groupe H de G est

   - soit engendré par un élément de la forme $r^a t^b$ et donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ (si a ou b non-nul) ou trivial;
   - soit engendré par deux générateurs de la forme $r^n t^p$, t^m avec $n \neq 0$, $m > 0$ et $0 \leq p < m$.

   Considérons le premier cas: on a $r^a t^b(x, y) = ((-1)^a x + (-1)^a b, y + a)$. Donc $r^a t^b$ est une translation si a est pair. Si a est impair, alors $r^a t^b$ est la composée de la symétrie par rapport à la droite verticale passant par $(-b/2, 0)$ et de la translation de vecteur vertical $(0, a)$. Il suit que si a est pair, $\mathbb{R}^2/\langle r^a t^b\rangle$ est homéomorphe à un cylindre $\mathbb{R} \times S^1$ et que si a est impair $\mathbb{R} \times S^1$ est homéomorphe au ruban de Möbius (non-borné) $\mathbb{R}^2/(x - b/2, y) \sim (-(x - b/2), y + a)$.

   Dans le deuxième cas, on a que $r^n t^p(x, y) = ((-1)^n x + (-1)^n p, y + n)$ qui est une translation si n est pair et encore une symétrie-glissée si n est impair. Donc, si n est pair, le revêtement $\mathbb{R}^2/\langle r^n t^p, t^m\rangle \to \mathbb{R}^2/G = K$ est un revêtement de la bouteille de Klein par un quotient de $\mathbb{R}^2$ par deux translations non-parallèles, c'est à dire par un tore $S^1 \times S^1$. C'est un revêtement à $\frac{nm}{\mathrm{pgcd}(p,m)}$ feuillets.
   Si n est impair, on obtient de même un revêtement de la bouteille de Klein par elle-même à $\frac{nm}{\mathrm{pgcd}(p,m)}$ feuillets.

   on vérifie sans peine que le groupe $\langle r^a t^b\rangle$ est distingué (et donc el revêtement associé est galoisien) si et seulement si a est pair (il suffit de conjugué le générateur par t) et que le groupe $\langle r^n t^p, t^m\rangle$ est distingué si et seulement si n est pair. Enfin si deux groupes sont les mêmes, il suit que leur intersection avec $\langle t\rangle$ sont les mêmes et leurs projections sur $G/\langle t\rangle$ sont aussi les mêmes. On en déduit, qu'ils ont le même nombre de générateurs et que ces générateurs coincident (au signe des exposants près).

---

[1] faire un dessin !

[2] on pourra aussi remarquer que si $a, b \neq 0$, alors il y a un isomorphisme de revêtements $(z, t) \mapsto (z \exp(2i\pi t), -b/a\, t)$ entre les deux formes proposées du revêtement $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(a, b)\mathbb{Z} \to (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$.

[3] attention, G n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; il n'est même pas abélien

5. du graphe en 8, avec 2 et 3 feuillets. Un revêtement connexe à 2 feuillets est nécessairement galoisien et tout groupe de cardinal 2 est *canoniquement* isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il y a donc bijection entre classe d'isomorphisme de revêtements connexes à deux feuillets et morphismes surjectifs du groupe fondamental (ici $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$) vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Or se donner un morphisme $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ revient à se donner deux éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il y en a donc 4 dont un seul n'est pas surjectif.

   Un revêtement à 3 feuillets du 8 est équivalent à la donnée de deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_3$ de $\{1, 2, 3\}$. Il y en a 36. Le revêtement est connexe si et seulement si le sous-groupe $< \sigma_1, \sigma_2 >$ de $\mathfrak{S}_3$ agit transitivement sur $\{1, 2, 3\}$. Deux couples (σ_1, σ_2) et (σ_1', σ_2') induisent des revêtements isomorphes si et seulement si il existe $\tau \in \mathfrak{S}_3$ tel que $\sigma_1 = \tau\sigma_1'\tau^{-1}$ et $\sigma_2 = \tau\sigma_2'\tau^{-1}$.