

Feuille de TD 5 de Revêtements et Groupe Fondamental

Exercice 1 (Comparaison avec la cohomologie de de Rham). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On note $Z^1(U)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $\frac{\partial \alpha_j}{\partial z_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_j}$. On note $B^1(U) \subset Z^1(U)$ le sous-espace vectoriel $\{df = (\frac{\partial f}{\partial z_i})_i | f : U \rightarrow \mathbb{R}\}$. On note $H_{dR}^1(U) = Z^1(U)/B^1(U)$.

Soit $\alpha \in Z^1(U)$.

On muni $E_\alpha = U \times \mathbb{R}$ de la topologie pour laquelle une base d'ouvert est donnée par les graphes des solutions locales de l'équation $E_{q_\alpha} : df = \alpha$ (c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial z_i} = \alpha_i$). Ainsi, si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ avec V un ouvert de U est telle que pour tout i , $\frac{\partial f}{\partial z_i} = \alpha_i$, alors $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in V\} \subset E_\alpha$ est un ouvert de E_α , et tout ouvert est une union de tels ouverts.

1. Rappeler pourquoi $B^1(U) \subset Z^1(U)$. Pourquoi E_α est-il union d'ouvert de type Γ_f ?
2. Montrer que la projection $p : E_\alpha \rightarrow U$ est un revêtement.
3. Soit $u \in U$. Montrer que $\pi_1(U, u)$ agit sur $p^{-1}(u) \simeq \mathbb{R}$ par translation. En déduire un morphisme de groupe $\phi_\alpha : \pi_1(U, u) \rightarrow \mathbb{R}$. On note $Hom(\pi_1(U), \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des morphismes $\pi_1(U, u) \rightarrow \mathbb{R}$
4. Montrer que $E_\alpha \rightarrow U$ est un revêtement trivial si et seulement si $\alpha \in B^1(U)$.
5. Montrer que $\phi_{\lambda\alpha + \nu\alpha'} = \lambda\phi_\alpha + \nu\phi_{\alpha'}$ (on s'intéressera à un morphisme de revêtements $E_\alpha \times_U E_{\alpha'} \rightarrow E_{\lambda\alpha + \nu\alpha'}$). En déduire une application linéaire injective $H_{dR}^1(U) \rightarrow Hom(\pi_1(U), \mathbb{R})$.

Exercice 2. (Extensions HNN et Van Kampen pour intersection à deux composantes connexes)

1. Soient H et G deux groupes et $f_1, f_2 : H \rightarrow G$ deux morphismes de groupes.
 - (a) Montrer qu'il existe un groupe G_0 , $t \in G_0$ et un morphisme $\phi : G \rightarrow G_0$ tel que
 - si $h \in H$, $\phi(f_1(h)) = t\phi(f_2(h))t^{-1}$;
 - si (G_1, t_1, ϕ_1) , où G_1 est un groupe, $t_1 \in G_1$ et $\phi_1 : G \rightarrow G_1$ est un morphisme vérifiant $\phi_1(f_1(h)) = t_1\phi_1(f_2(h))t_1^{-1}$ pour tout $h \in H$, alors il existe un unique morphisme $\psi : G_0 \rightarrow G_1$ tel que $\psi(t) = t_1$ et $\psi\phi = \phi_1$.

Le groupe G_0 est noté $G*_H$.

- (b) Montrer que $G*_H = G *_H H (H * \mathbb{Z})$ pour des applications $H * H \rightarrow G$ et $H * H \rightarrow H * \mathbb{Z}$ bien choisies.
- (c) Montrer que, si $H = G$, $f_1 = id_G$ et f_2 est un automorphisme de G , alors $G*_H = G \rtimes \mathbb{Z}$ où $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow Aut G$ est donné par $\alpha(n) = f_2^n$.

2. Soient X un espace topologique connexe par arc, U et V deux ouverts connexes par arcs de X tels que $X = U \cup V$ et tels que $U \cap V$ ait deux composantes connexes par arc A et B . Soient $a \in A$, $b \in B$, c_U un chemin reliant a à b dans U et c_V un chemin reliant a à b dans V . Notons s le lacet $s = c_U c_V^{-1}$ d'origine a .

Notons $G = \pi_1(X, a)$, $G_U = \pi_1(U, a)$, $G_V = \pi_1(V, a)$, $H_A = \pi_1(A, a)$, $H_B = \pi_1(B, b)$.

- (a) Montrer qu'on a un morphisme naturel $f_0 : G_U *_H A G_V \rightarrow G$.
- (b) On considère les composées $f_U : H_B \rightarrow \pi_1(U, b) \xrightarrow{[c_U]} \pi_1(U, a) \rightarrow G_U *_H A G_V$ et $f_V : H_B \rightarrow \pi_1(V, b) \xrightarrow{[c_V]} \pi_1(V, a) \rightarrow G_U *_H A G_V$ (où $[c_U]$ envoie un lacet c d'origine b sur le lacet $c_U c c_U^{-1}$). Montrer que $f_0 f_U(c) = s f_0 f_V(c) s^{-1}$. En déduire un morphisme

$$f : (G_U *_H A G_V) *_H B \rightarrow G$$

(c) Montrer que f est un isomorphisme.

3. Soient $f_0, f_1 : Y \rightarrow X$ deux applications continues et

$$S = X \times [0, 1] \amalg Y \times [0, 1] \quad / \quad ((y, 0) \sim (f_0(y), 0) \text{ et } (y, 1) \sim (f_1(y), 1)).$$

Montrer que $\pi_1(S) \simeq \pi_1(X) *_{\pi_1(Y)}$ (on rappelle que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, l'application $Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ est une équivalence d'homotopie).

4. Soit $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ et soit h_A l'automorphisme du tore \mathbb{T} induit par $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Soit

$$V_A = \mathbb{T} \times [0, 1] / (t, 0) \sim (h_A(t), 1).$$

Montrer que $\pi_1(V_h) = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ où $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}^2 = GL(2, \mathbb{Z})$ est donné par $\alpha(n) = A^n$.