Analyse TD 1

J. Rocher

Jeudi 23 mars 2006

1 L'ensemble $\mathbb{R}$

1.1 généralités

1. Soit a, b, c, d quatre réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$. Montrer qu'ils sont égaux.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2 ..., x_n$ n réels positifs non nuls. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

Quand a-t-on égalité ?

3.* Soit $x,y \in \mathbb{R}_+^*$. On définit les moyennes :

- arithmétique : $a = \dfrac{x+y}{2}$
- géométrique : $g = \sqrt{xy}$
- harmonique : $h = \dfrac{2xy}{xy}$
- quadratique : $q = \sqrt{\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)}$

Montrer que a, g, h et q sont rangés dans un ordre indépendant du choix de x et y.

1.2 borne supérieure, borne inférieure

1. Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$; que dire de $\inf(A \cup B)$?
Faire la même étude sur $A \cap B$.

2. Soit $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ majorée et $g : X \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer :

$$\sup_X f + \inf_X g \leq \sup_X (f + g).$$

3. Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit, des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

- $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$
- $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$
- $\mathbb{N}$
- $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $\{\sin r, r \in \mathbb{Q}\}$ (rappel : π est irrationnel).

4.* On définit la fonction f par :

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (1-x)\sin\dfrac{\pi}{x}. \end{array}$$

Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

1.3 réels et rationnels

1. Montrer que $\dfrac{\log 2}{\log 3}$ est irrationnel.

2. Soit a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

3.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer le *théorème d'approximation de Dirichlet* :
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}*$, tel que $q \leq N$ et

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}.$$

Indication : considérer les parties fractionnaires de $0, x, 2x, 3x...Nx$ et la partition de l'intervalle $[0,1[$ en N sous-intervalles longueur $\frac{1}{N}$.

En déduire que si x est irrationnel, il existe une *infinité* de fractions irréductibles $\dfrac{p}{q}$ telles que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

2 Suites réelles

2.1 études de suites

1. Pour chacune des suites suivantes (on donne le terme général en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$), on calculera les bornes supérieures et inférieures des valeurs prises par la suite, on étudiera la monotonie et la convergence, et le cas échéant on calculera la limite à l'infini.

– $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n+1}$
– $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
– $\dfrac{n \sin n}{n^2+1}$
– $(-1)^n + \dfrac{1}{n}$

2. *Vrai* ou *Faux* ? Pour les proposition suivantes : les démontrer si elles sont vraies, exhiber un contre-exemple sinon.
– Si une suite positive est non-majorée, elle tend vers $+\infty$.
– Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
– Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
– Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
– Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

3. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que pour tout $n > 0$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln n + 1 - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire que H tend vers l'infini.

Soit $u_n = H_n - \ln n$. Montrer la convergence de u. Sa limite est appelée *constante d'Euler* et notée γ.

4.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite l. On définit sa *moyenne de Césaro* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_0 + u_1 + u_2 + ...u_n}{n}.$$

Montrer que v est convergente de limite l. La réciproque est-elle vraie ?

5. Soit u et v les suites de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

Nota : $k!$ représente la factorielle de k : 1 si $k = 0$, et le produit des entiers de 1 à k sinon.

Montrer que ces deux suite sont convergentes, de même limite. On admettra que cette limite est le nombre e.

Prouver l'irrationnalité de e.