Analyse TD 2

J. Rocher

Jeudi 30 mars 2006

1 Fonctions usuelles

1.1 exponentielles, logarithmes

1. Montrer que $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

2. Résoudre $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ dans $\mathbb{R}$.

1.2 fonctions trigonométriques et réciproques

1. Calculer $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$, pour tout x où ceci a un sens.

2. Résoudre les équations suivantes (x réel) :
   . $\arctan x + \arctan 2x = \dfrac{\pi}{4}$
   . $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin x$

3. Calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right), \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
   Indication pour le dernier : remarquer que $\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ puis simplifier l'équation obtenue.

1.3 trigonométrie hyperbolique

Présentation : On définit les fonctions sh, ch et th (respectivement sinus, cosinus et tangente hyperboliques) par les formules ($x \in \mathbb{R}$) :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

Les exercices suivants se suivent et vont vous permettre de faire plus ample connaissance avec ces fonctions.

1. Étudiez ces fonctions (signes, parité, variations, comportement en 0 et à l'infini). Tracez-en le graphe. Prouvez la *relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique* : $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

2. On définit les *fonctions hyperboliques réciproques* argsh, argch et argth (respectivement arguments sinus, cosinus et tangente hyperboliques) comme étant les réciproques des restrictions des fonctions ci-dessus au plus grand intervalle possible contenant 1. Calculez explicitement ces fonctions.

3. Calculez $\operatorname{ch}(a+b)$ en fonction des images de a et b par les fonctions cosinus et sinus hyperbolique. De même pour $\operatorname{sh}(a+b)$.

2 Limites, continuité ponctuelle

2.1 généralités

1. Montrer que si une fonction périodique admet une limite en l'infini, elle est constante.

2.* Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$. La proposition «Si pour tout $x > 1$ la suite $f(nx)$ tend vers 0 alors f a pour limite 0 en l'infini» est fausse. Construire un contre-exemple.

Indication : ne pas chercher à avoir f continue. Pensez arithmétique !

3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que si x est rationnel, $f(x) = 1$, et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f est partout discontinue.

4.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle en tout point irrationnel, valant 1 en 0, et valant $\frac{1}{q}$ en tout autre rationnel s'écrivant $\frac{p}{q}$ sous forme irréductible. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$ et continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

5. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

2.2 calculs

Déterminer les limites suivantes

a) $\dfrac{x^2+1}{\sin^2 x}$ en 0,

b) $xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0^+,

c) $\dfrac{\tan 3x}{\sin x}$ en 0,

d) $\operatorname{th}(\arctan x)$ en $+\infty$,

d) $\sin \dfrac{1}{x}$ en 0^+,

e) x^x en 0^+,

f) $\dfrac{x+2}{x^2 \ln x}$ en 0.