Analyse TD 3

J. Rocher

Avril 2006

1 Fonctions dérivables

1.1 Calculs sur des exemples

1. Étudiez la dérivabilité des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$
- $f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$
- $f(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$ si $x \neq 1$, $f(1) = 1$
- $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

2. Calculez les dérivées de :

- $f(x) = \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}$
- $f(x) = \log\left(\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$
- $f(x) = (x(x-3))^{\frac{1}{3}}$
- $f(x) = \ln\left(\cos(\pi + \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1})\right)$

3. Étudiez les fonctions suivantes (domaine, variations, extrema, branches asymptotiques...) :

- $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
- $f(x) = \operatorname{sh} x - x - \dfrac{x^3}{6}$
- $f(x) = \cos x - 1 + x^2$
- $f(x) = x^4 - x^3 + 1$
- $f(x) = \dfrac{1 + x^n}{(1 + x)^n}$, où $n \geq 2$, $x > 0$.

1.2 Autres exercices

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; soit a et b deux réels. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ a au plus trois racines réelles.

*2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe C^∞.
Indication : on pourra d'abord étudier $\phi : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ en 0^+.

3. On rappelle la *formule de Leibniz* (la redémontrer) : si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, leur produit fg aussi, et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Calculez la dérivée d'ordre n de $x^n(1-x)^n$. Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis : applications

1. Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré n, possédant n racines réelles distinctes. Montrer que P' a $n-1$ racines réelles distinctes.

2. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer que : $\exists x_0 \in]a, +\infty[, f'(x_0) = 0$.

3. Soit f continue, deux fois dérivable sur $[a, a+2h]$. Montrer qu'il existe α dans $]0, 2[$ tel que

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(a+\alpha h).$$

(On pourra par exemple introduire la fonction $g(t) = f(a+t+h) - f(a+t)$...)

4. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n\right).$$

a) Calculer le degré et la parité du polynôme P_n.

b) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

c) Montrer que P_n a n racines distinctes dans $]-1, 1[$.