Analyse TD 4

J. Rocher

Avril 2006

1 Développements limités classiques

Pour toutes les fonctions ci-dessous, calculez le développement limité en 0 a un ordre n quelconque.

- $x \to \dfrac{1}{1-x}$
- $x \to \dfrac{1}{1+x}$
- $x \to \ln(1-x)$
- $x \to \ln(1+x)$
- arctan
- argth
- exp
- sin
- cos
- sh
- ch
- $x \to (1+x)^\alpha$
- $x \to \sqrt{1+x}$
- $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
- arcsin
- arccos
- argsh
- argch

2 Autres calculs de développements limités

1. Calculez les développements limités de :

a) tan et th en 0, à l'ordre 5,

b) $x \to \ln(\cos(x))$ en 0, à l'ordre 5,

c) $x \to \sin^6 x$ en 0, à l'ordre 10,

d) $x \to \displaystyle\int_0^x \cos t^2$ en 0, à l'ordre 8,

e) $x \to \mathrm{sh}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}(x))$ en 0, à l'ordre 7.

2. Calculez les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ (a et b réels),

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \left(\exp(\frac{1}{x}) - \exp(\frac{1}{x+1})\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3 \frac{\arctan x - x}{\cos x^2 - 1}$.

3. La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \\ \mathrm{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{en } x = 0 \end{cases}$$

admet-elle un développement limité au voisinage de 0 ? Si non, prouvez-le ; si oui, calculez-le à l'ordre n.

4. Il n'existe pas de formule simple générale pour le développement limité de la fonction *tangente* en 0. Cependant, il existe des formules de récurrences permettant de calculer ses coefficients. Montrez qu'il existe une suite β_n de nombres rationnels telle que pour tout n entier naturel, le développement limité de $x \to \tan x$ à l'ordre $2n+2$ en 0 soit $\sum_{k=0}^{n} \beta_k x^{2k+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$, où β_n s'exprime en fonction des termes précédents suivant une relation de récurrence que l'on déterminera.

En déduire le développement limité de tan à l'ordre 12 ; faire de même pour th.

5. Trouver le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction

$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right).$$

6. Soit f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(\theta) = 2\tan\theta - \theta$. Montrer que f admet une réciproque impaire de classe C^∞. Calculez le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.