APPROXIMATION DE FONCTIONS DÉRIVABLES PAR UNE FONCTION POLYNOMIALE

Définition 1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(1) Si f est continue, on dit que f est de *classe* C^0.
(2) Si f est dérivable et si f' est continue sur I, on dit que f est de *classe* C^1.
(3) Si f est dérivable et si f' est dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ sa dérivée. Si $f^{(2)}$ est continue, on dit que f est de classe C^2.
(4) Plus généralement, pour tout $\mathbb{N}^*$, si on peut dériver n fois la fonction f, et si la dérivée n-ième, notée $f^{(n)}$, est continue, alors on dit que f est de classe C^n.
(5) Si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est infiniment dérivable, on dit que f est de classe C^∞.

Exemple 2.

(1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,\ f^{(3)}(x) = 24x,\ f(4)(x) \equiv 24,\ f^{(5)}(x) \equiv 0,$$

d'où :$f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$ est de classe C^∞ et nous avons $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout entier $k \geq n + 1$.
(4) les fonctions $\sin x,\ \cos x,\ e^x, \cosh x,\ \sinh x$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(5) La fonction $\log x$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
(6) la fonction $f(x) = x.|x|$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ et C^1 sur $\mathbb{R}$.

Nous aurons besoin du résultat technique suivant.

Lemme 3. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $b \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie en posant :*

$$\begin{aligned} g(x) &= f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \\ &= f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f^{(2)}(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la fonction g est dérivable sur I et nous avons :

$$g'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x),$$

pour tout $x \in I$.

Preuve

Puisque f est $(n+1)$ fois dérivable, les fonctions $f', \cdots, f^{(n)}$ sont dérivables. De ce fait g est composée de sommes et de produits de fonctions dérivables sur I. Par conséquent, g est dérivable sur I. Pour tout $x \in I$ nous avons :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{((b-x)^k)'}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} (f^{(k)}(x))' \right) \\
&= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k(-1)(b-x)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\
&= -f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x).
\end{aligned}$$

Dans la première somme, posons $p = k-1$, nous avons :

$$g'(x) = -f'(x) + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x).$$

Enfin, dans la deuxième somme appelons p la variable, c'est à dire posons $k = p$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -f'(x) + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) \\
&= -f'(x) + f'(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \\
&= -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Nous déduisons le résultat important :

Théorème 4. *(Formule de Taylor-Lagrange)*

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. Soient $a, b \in I$ tels que $a \neq b$.

Dans ces conditions, il existe au moins un réel c, strictement compris entre a et b, tel que :

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Cette formule est appelée la formule de Taylor-Lagrange *à l'ordre n au point a.*

Preuve

Reprenons la fonction g du lemme 3 :

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x), \quad x \in I.$$

Nous avons :

$$g(b) = 0 \ \text{ et } \ g(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

Posons :

$$h(x) := g(x) - g(a)\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}, \ x \in I$$

La fonction h est dérivable sur I. De plus :

$$h(a) = g(a) - g(a)\frac{(b-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} = 0 \ \text{ et } \ h(b) = g(b) = 0.$$

Nous pouvons de ce fait appliquer le théorème de Rolle à la fonction h entre a et b : il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$h'(c) = 0.$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned} h'(c) &= g'(c) - g(a)(n+1)(-1)\frac{(b-c)^n}{(b-a)^{n+1}} \\ &= g'(c) + (n+1)g(a)\frac{(b-c)^n}{(b-a)^{n+1}} \\ &= -\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) + (n+1)g(a)\frac{(b-c)^n}{(b-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Comme $h'(c) = 0$ nous avons donc

$$\frac{(n+1)}{(b-a)^{n+1}}g(a) - \frac{f^{n+1}(c)}{n!} = 0,$$

c'est à dire :

$$g(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c) = 0.$$

En remplaçant $g(a)$ par son expression nous obtenons :

$$f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0,$$

ce qui termine la preuve. $\square$

***Corollaire* 5.** *Reprenons les hypothèses et les notations de la formule de Taylor-Lagrange. Supposons que* $0 \in I$. *Nous avons :*

(1) *Pour tout* $x \in I$, *il existe un réel* c_x *strictement entre* 0 *et* x *tel que :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (2)$$

(2) *Si il existe* $M > 0$ *tel que* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in I$, *alors nous avons pour tout* $x \in I$ *:*

$$\left|f(x) - (f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n)\right| \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (3)$$

Preuve

Pour (2), on applique la formule de Taylor-Lagrange en posant $a = 0$ et $b = x$.

Pour (3), on applique (2), de ce fait, pour tout $x \in I$, il existe un réel c_x strictement entre 0 et x tel que :

$$\left|f(x) - (f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n)\right| = |f^{(n+1)}(c_x)|\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Comme nous avons par hypothèse $|f^{(n+1)}(c_x)| \leq M$, on obtient l'inégalité (3), ce qui termine la preuve. □

Exemple 6.

(1) *Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction* $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, *au point* 0 *et à l'ordre* 4.

La fonction f est de classe C^5 (en fait infiniment dérivable) sur $\mathbb{R}$, de plus :

$$(e^x)^{(k)} = e^x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } k \in \mathbb{N}.$$

En particulier :

$$(e^x)^{(k)}(0) = 1,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un réel c_x strictement entre 0 et x tel que :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + e^{c_x}\frac{x^5}{5!}.$$

(2) *Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction* $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, *au point 0, à l'ordre 3.*

La fonction $\sin x$ est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ (en fait infiniment dérivable) et nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin'(x) = \cos x,\ \sin^{(2)} x = -\sin x,\ \sin^{(3)} x = -\cos x,\ \sin^{(4)} x = \sin x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_x strictement compris entre 0 et x tel que :

$$\begin{aligned}\sin x = &\ \sin 0 + (\cos 0)x + (-\sin 0)\frac{x^2}{2!} + (-\cos 0)\frac{x^3}{3!} + \sin c_x \frac{x^4}{4!}\\ = &\ x - \frac{x^3}{3!} + \sin c_x \frac{x^4}{4!}.\end{aligned}$$

(3) *Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction* $f(x) = \tan x$, $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ *au point 0, à l'ordre 3.*

La fonction $\tan x$ est de classe C^4 sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et nous avons pour tout $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x$,. Ce qui nous donne :

$\tan^{(2)} x = 2\tan x + 2\tan^3 x$

$\tan^{(3)} x = 2(1 + \tan^2 x) + 6\tan^2 x(1 + \tan^2 x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$

$\tan^{(4)} x = 16\tan x + 40\tan^3 x + 24\tan^5 x.$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, $x \neq 0$, il existe un réel c_x entre 0 et x tel que :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + (16\tan c_x + 40\tan^3 c_x + 24\tan^5 c_x)\frac{x^4}{4!}.$$

Nous allons voir qu'il existe une autre manière d'approximer une fonction dérivable par une fonction polynomiale.

Théorème 7. *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert, soit* $a \in I$ *et soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans ces conditions, il existe une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ *continue telle que :*

$$\lim_{x \to a} \rho(x) = 0, \tag{4}$$

and

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\rho(x). \tag{5}$$

La formule (5) s'appelle le développement limité de f à l'ordre n au point a.

Preuve

Nous ferons une démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Première étape : Lorsque $n = 1$, on pose :

$$\rho(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Comme f est de classe C^1, on a bien $\lim_{x \to a} \rho(x) = f'(a) - f'(a) = 0$. De plus :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\rho(x).$$

De ce fait, les conditions (4) et (5) sont satisfaites pour $n = 1$.

Deuxième étape : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que si la propriété est vraie à l'ordre n alors elle est vraie à l'ordre $n+1$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. Posons $g = f'$, la fonction g est de classe C^n et de ce fait, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe une fonction continue $\rho : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(H) \quad \begin{cases} \lim\limits_{t \to a} \rho(t) = 0 \\ \qquad g(t) = g(a) + g'(a)(t-a) + \dfrac{g^{(2)}(a)}{2!}(t-a)^2 + \cdots + \dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + (t-a)^n \rho(t), \\ \qquad \forall t \in I. \end{cases}$$

Comme $g(t) = f'(t)$, on a donc :

$$f'(t) = f'(a) + f^{(2)}(a)(t-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(t-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(t-a)^n + (t-a)^n \rho(t),$$

pour tout $t \in I$. Soit $x \in I$, en intégrant chaque terme de cette dernière égalité entre a et x on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = &\int_a^x f'(a)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f^{(2)}(a)(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(t-a)^2\,\mathrm{d}t \\ &+ \cdots + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(t-a)^n\,\mathrm{d}t + \int_a^x (t-a)^n \rho(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + f^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ + (x-a)^{n+1}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x (t-a)^n \rho(t)\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Posons :

$$S(x) = \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x (t-a)^n \rho(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous avons donc :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + (x-a)^{n+1} S(x).$$

Par conséquent, il suffit de montrer que $\lim_{x \to a} S(x) = 0$, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in I, \big(|x-a| < \eta \text{ et } x \neq a\big) \Rightarrow |S(x)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{t \to a} \rho(t) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in I$:

$$\big(|x-a| < \eta \text{ et } x \neq a\big) \Rightarrow |\rho(t)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \neq a$ et $|x-a| < \eta$ on a :

$$\begin{aligned}
|S(x)| &= \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left| \int_a^x (t-a)^n \rho(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left| \int_a^x |t-a|^n |\rho(t)|\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left| \int_a^x |t-a|^n \varepsilon\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|x-a|^{n+1}} \left| \int_a^x |t-a|^n\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

car un calcul montre que si $x > a$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_a^x |t-a|^n\,\mathrm{d}t &= \int_a^x (t-a)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x \\
&= \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

et si $x < a$ nous avons :

$$\int_a^x |t-a|^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_a^x (t-a)^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

dans les deux cas nous avons donc :

$$\left| \int_a^x |t-a|^n\,\mathrm{d}t \right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}.$$

Ce qui termine la preuve. □

Exemple 8.

(1) *Donner le développement limité de* $\sin x$ *à l'ordr 5 en 0.*

La fonction $\sin x$ est de classe C^5 (et même plus !) et nous avons :

$$\sin'(x) = \cos x,\ \sin^{(2)} x = -\sin x,\ \sin^{(3)} x = -\cos x,\ \sin^{(4)} x = \sin x,\ \sin^{(5)} x = \cos x.$$

Le théorème précédent nous dit qu'il existe une fonction continue $\varepsilon(x)$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$\begin{aligned}
\sin x = &\ \sin(0) + \cos(0) + (-\sin(0))\frac{x^2}{2} + (-\cos(0))\frac{x^3}{3!} + \sin(0)\frac{x^4}{4!} + \cos(0)\frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\
= &\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

(2) *Calculer* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

Un calcul rapide donne le développement limité suivant pour la fonction $\cos x$ en 0 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} (\frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} (-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)) = -\frac{1}{2},$$

car $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(3) *Donner le développement limité de* $\cosh x$ *en 0 à l'ordre 4.*

La fonction $\cosh x$ est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ (et même C^∞ !) et nous avons :

$$\cosh' x = \text{sinh}x,\ \cosh^{(2)} x = \text{cosh}x,\ \cosh^{(3)} x = \text{sinh}x,\ \cosh^{(4)} x = \text{cosh}x.$$

Ainsi

$$\text{cosh}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(4) *Donner le développement limité de la fonction* $f(x) = \log(1+x)$ *en 0 à l'ordre 4.*

La fonction f est de classe C^4 sur $]-1, +\infty[$ et nous avons :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

ce qui donne :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction continue sur $]-1, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Opérations sur les développements limités

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n. On suppose que $0 \in I$. On considère le développement limité de f et g en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$$

où P et Q sont deux fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

Le développement limité de $f+g$ en 0 à l'ordre n est :

$$(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Par exemple nous savons que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x).$$

Par conséquent, le développement limité de la fonction $\sin x + \cos x$ en 0 à l'ordre 4 est :

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le développement limité de λf en 0 à l'ordre n est :

$$\lambda f(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Par exemple le développement limité de $\lambda \sin x$ en 0 à l'ordre 4 est :

$$\lambda \sin x = \lambda(x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon_1(x)) = \lambda x - \lambda \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x),$$

où on a posé $\varepsilon(x) = \lambda \varepsilon_1(x)$.

Le développement limité de $(fg)(x)$ en 0 à l'ordre n est :

$$(fg)(x) = T_n(P(x)Q(x)) + x^n \varepsilon(x),$$

où $T_n(P(x)Q(x))$ est la somme des puissances de $P(x)Q(x)$ de degré $\leq n$.

Cherchons par exemple le développement limité de $\sin x \cos x$ en 0 à l'ordre 4. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= (x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon_1(x))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x)) \\ &= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x)) \\ &= x - \frac{2}{3} x^3 + x^4 \varepsilon(x)) \end{aligned}$$

Supposons que la composée $f \circ g$ existe et que $g(0) = 0$.

Dans ces conditions le développement limité de $f \circ g$ en 0 à l'ordre n est :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P(Q(X))) + x^n \varepsilon(x).$$

Exemple 9.

(1) Nous avons $\sin 0 = 0$, de ce fait le développement limité de $\cos(\sin x)$ en 0 à l'ordre 4 est :

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{4!} + sin^4 x\varepsilon_3(x) \\
&= 1 - \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_1(x))^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_1(x))^4}{4!} + (x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_1(x))^4\varepsilon_3(x) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 2\frac{x^4}{3!}) + \frac{1}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

(2) *Donner le développement limité de la fonction* $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ *en 0 à l'ordre 5.*

Posons $g(x) = x^2$ et $f(t) = \frac{1}{1-t}$. Nous avons donc $h(x) = (f \circ g)(x)$. Cherchons le développement limité de f en 0 à l'ordre 3, nous avons :

$$f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2},\ f^{(2)}(t) = \frac{2}{(1-t)^3},\ f^{(3)}(t) = \frac{3!}{(1-t)^4},$$

ce qui nous donne :

$$f(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^3\varepsilon_1(t).$$

De ce fait :

$$h(x) = f(x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^5\varepsilon(x).$$