**Mathématiques - Problème 4**
**Cours de Réorientation, 2005-2006**

## Exercice I

Soit $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$, une suite d'intervalles vérifiant:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} \subset I_n.$$

1) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$ et tout entier $q \in \mathbf{N}$ on a $a_p \leq b_q$.

2) On considère les ensembles $A = \{a_p,\ p \in \mathbf{N}\}$ et $B = \{b_q,\ q \in \mathbf{N}\}$.

a) Montrer que $A$ est une partie majorée de $\mathbf{R}$ et que $B$ est une partie minorée de $\mathbf{R}$.

b) En déduire que $A$ admet une borne supérieure, que nous appellerons $a_0$, et que $B$ admet une borne inférieure, que nous appellerons $b_0$.

c) Montrer que $a_0 \leq b_0$ et en déduire :

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n \neq \emptyset.$$

3) Soit $f:\ \mathbf{N} \longrightarrow ]0,1[$ une application.

a) Montrer qu'il existe un intervalle fermé et borné $I_0 \subset ]0,1[$ tel que $f(0) \notin I_0$.

b) Plus généralement montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe un intervalle fermé et borné $I_n$ tel que:

$$\text{(i) } I_{n+1} \subset I_n \text{ et (ii) } f(n) \notin I_n.$$

En déduire que $f$ n'est pas surjective.

4) L'intervalle $]0,1[$ est-il dénombrable? $\mathbf{R}^{+*}$ est-il dénombrable? $\mathbf{R}$ est-il dénombrable?

## Exercice II

1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ il existe un entier relatif $p_n \in \mathbf{Z}$ tel que:

$$0 \leq x - \frac{p_n}{2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

2) Déduire que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ est *dense* dans $\mathbf{R}$, c'est à dire que tout réel peut-être approché arbitrairement près par un rationnel.

## Exercice III

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient:

$$(*) \qquad \forall x,\ y \in \mathbf{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

1) Montrer que les fonctions *affines*, c'est à dire les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ où $a$ et $b$ sont des constantes réelles, vérifient $(*)$.

*Dans la suite, $f$ désigne une fonction vérifiant $(*)$. On pose $c_0 = f(0)$ et $c_1 = f(1)$.*

2) Montrer que $f(2) = 2c_1 - c_0$ et $f(-1) = 2c_0 - c_1$. Calculer de même $f(3)$ en fonction de $c_1$ et $f(2)$, puis $f(-2)$ en fonction de $c_0$ et $f(-1)$.

3)- a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des réels $a_n$ et $b_n$ ne dépendant pas de $c_0$ et de $c_1$, tels que $f(n) = a_n c_0 + b_n c_1$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des réels $\alpha_n$ et $\beta_n$ ne dépendant pas de $c_0$ et de $c_1$, tels que $f(-n) = \alpha_n c_0 + \beta_n c_1$.

c) Montrer qu'il existe une fonction affine $g$ telle que $f(n) = g(n),\ \forall n \in \mathbf{Z}$.

4) Soit $p \in \mathbf{Z}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $f(\frac{p}{2^n})$ est déterminé par $c_0$ et $c_1$. En déduire que $f(\frac{p}{2^n}) = g(\frac{p}{2^n})$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, où $g$ est la fonction affine de la question 3)-c).

5) Conclure à l'aide de l'exercice II que si $f$ est continue alors nous avons $f = g$. De ce fait, toute fonction continue vérifiant $(*)$ est affine.