FONCTIONS USUELLES

Théorème 1. *Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to J$ une bijection. Supposons que f est dérivable sur I et que $f^{'}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Dans ces conditions nous avons :*

(1) *Pour tout $y \in J$, f^{-1} est dérivable en y et*

$$(f^{-1})^{'}(y) = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(y))}$$

(2) *Si f est croissante alors f^{-1} est croissante.*

(3) *Si f est décroissante alors f^{-1} est décroissante.*

Preuve

Montrons l'affirmation 1). Soit $y,\ y_0 \in J$, $y \neq y_0$. Soit $x \in I$ l'antécédent de y et $x_0 \in I$ l'antécédent de y_0:

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y_0 = f(x_0)$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}
\end{aligned}$$

Or $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite non nulle quand x tend vers x_0. De plus, lorsque y tend vers y_0 alors x tend vers x_0. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{1}{\lim_{x \to x_0,\ x \neq 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \\
&= \frac{1}{f^{'}(x_0)} \\
&= \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(y_0))}
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 2. (et définition*)*
Il existe une unique fonction dérivable $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

(1) $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in]0,+\infty[.$
(2) $f(1) = 0.$

Cette fonction est appellée logarithme népérien *et est notée* $\log(x)$*.*

Preuve
Pour montrer l'existence nous posons :

$$\log x := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t},\ x > 0.$$

Montrons l'unicité. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant :

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0, \quad \text{et} \quad f(1) = 0.$$

Pour tout $x > 0$ nous avons :

$$(\log x - f(x))' = (\log x)' - f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

De ce fait la fonction $(\log x - f(x))$ est constante sur $]0,+\infty[$. Comme $\log 1 - f(1) = 0$ nous déduisons que $\log x - f(x) = 0$ pour tout $x > 0$. □

Proposition 3. (Propriétés du logarithme)

(1) *Pour tous* $x,\ y \in]0,+\infty[$*, nous avons :*
$$\log xy = \log x + \log y.$$
(2) *Pour tout* $x > 0,\ \log(1/x) = -\log x.$
(3) *Pour tout* $x > 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *nous avons :*
$$\log x^n = n \log x \quad \text{et} \quad \log x^{-n} = -n \log x.$$
(4)
$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty.$$
(5) *La fonction* $\log x$ *est une bijection strictement croissante de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Preuve
Montrons (1). Soit $y > 0$, pour tout $x > 0$ posons :

$$f(x) = \log xy.$$

La fonction f est dérivable et nous avons pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = y \log' xy = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

De ce fait, la fonction $(f - \log)$ est une fonction constante sur $]0,+\infty[$, il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \log x + c,\ x > 0.$$

Nous avons donc pour tout $x > 0$:

$$\log xy = \log x + c.$$

En choisissant $x = 1$ nous obtenons :

$$\log y = \log 1 + c = c,$$

de ce fait nous avons pour tous $x, y > 0$:

$$\log xy = \log x + \log y.$$

Pour montrer (2) remarquons que :

$$0 = \log 1 = \log \frac{x}{x} = \log x + \log \frac{1}{x},$$

de ce fait :

$$\log \frac{1}{x} = -\log x.$$

Nous montrons la première affirmation de (3) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $n = 0$. Pour tout $x > 0$ nous avons :

$$\log x^0 = \log 1 = 0 = 0. \log x.$$

Par conséquent la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé tel que $\log x^n = n \log x$ pour tout $x > 0$. Nous avons :

$$\log x^{n+1} = \log(x.x^n) = \log x + \log x^n = \log x + n \log x = (n+1) \log x,$$

ce qui montre que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour la deuxième affirmation remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$ nous avons :

$$\log x^{-n} = \log(x^n)^{-1} = -\log(x^n) = -n \log x.$$

Montrons (4). Comme $\log' x > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction log est strictement croissante. Pour montrer que $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ il suffit donc de montrer que $\log x$ n'est pas bornée quand x tend vers $+\infty$. Nous avons : $n \log 2 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, ainsi $\log 2^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ cela montre que $\log x$ n'est pas bornée quand $x \to +\infty$.

En posant $u = 1/x$ nous trouvons :

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = \lim_{u\to+\infty} \log \frac{1}{u} = -\lim_{u\to+\infty} \log u = -\infty.$$

Pour montrer (5) remarquons que, du fait que $\log' x > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\log x$ est strictement croissante. Elle constitue donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]\lim_{x\to 0} \log x, \lim_{x\to+\infty} \log x[= \mathbb{R}$ (d'après (4)), ce qui termine la preuve. □

***Corollaire* 4.** (et définition)

La fonction log *admet une réciproque, elle est appelée la* fonction exponentielle néperienne *(ou plus simplement* fonction exponentielle *) :* $x \in \mathbb{R} \to e^x \in]0, +\infty[$. *La fonction exponentielle a les propriétés suivantes :*

(1) $x \mapsto e^x$ *est une bijection dérivable et strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$.

(2) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *nous avons :* $(e^x)' = e^x$.
(3) $e^0 = 1$.
(4) $e^{x+y} = e^x.e^y$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$.
(5) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Preuve

L'existence de la réciproque de la fonction log et la propriété (1) viennent du fait que log : $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une bijection dérivable et strictement croissante, voir le théorème 1.

Montrons (2). Soit $x \in R$ et soit $t \in]0,+\infty[$ tel que $x = \log t$. Nous avons d'après le théorème 1 :

$$(e^x)' = \frac{1}{\log' t} = \frac{1}{1/t} = t = (\log^{-1})(x) = e^x.$$

Pour montrer (3) remarquons que $e^0 = (\log^{-1})(0) = 1$ car $\log 1 = 0$.

Montrons (4). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\log e^{x+y} = x + y$$

et aussi :

$$\log(e^x.e^y) = \log e^x + \log e^y = x + y$$

et de ce fait $\log e^{x+y} = \log(e^x.e^y)$. Comme la fonction log est injective, nous déduisons :

$$e^{x+y} = e^x.e^y.$$

Pour montrer (5), pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous posons $x = \log u$, où $u \in]0,+\infty[$. De ce fait $(x \to -\infty) \Rightarrow (u \to 0)$ et $(x \to +\infty) \Rightarrow (u \to +\infty)$. De ce fait :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{u\to0} e^{\log u} = \lim_{u\to0} u = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{u\to+\infty} e^{\log u} = \lim_{u\to+\infty} u = +\infty$$

ce qui termine la démonstration. □

Définition 5. A l'aide des fonctions $x \mapsto \log x$ et $x \mapsto e^x$ nous pouvons définir la puissance d'un réel positif quelconque.

(1) Soit $x > 0$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Le réel *x à la puissance a*, noté x^a est défini par :

$$x^a := e^{a \log x}.$$

(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ la fonction $x \in]0,+\infty[\mapsto x^a \in \mathbb{R}$ est appelée une *fonction puissance.*
(3) Pour tout $a > 0$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in]0,+\infty[$ est appelée *la fonction exponentielle de base* a.

Propriétés

(1) Pour tous $x, y > 0$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $(xy)^a = x^a.y^a$.

(2) Pour tout $x > 0$ et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ nous avons

$$x^{a+b} = x^a . x^b \quad \text{et} \quad (x^a)^b = x^{ab}.$$

Ces propriétés se montrent directement à partir des propriétés des fonctions $\log x$ et e^x. Montrons par exemple la dernière propriété, nous avons :

$$(x^a)^b = e^{b \log(x^a)} = e^{b(a \log x)} = e^{ab \log x} = e^{\log x^{ab}} = x^{ab}.$$

Lemme 6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :*

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Preuve

La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour cela pour tout $n \in N$ nous appelons P_n la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Si $n = 0$ nous avons :

$$e^0 = 1 \geq 1,$$

la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété P_n soit vraie, montrons que la propriété P_{n+1} est vraie aussi. Pour cela nous définissons les fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})$$

et

$$g(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!})$$

Un simple calcul montre que $g'(x) = f(x),\ x \geq 0$. Comme $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de ce fait $g(x) \geq g(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$, ce qui termine la preuve. □

Proposition 7. : Puissances comparées

Nous avons :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\log t}{t} = 0. \tag{1}$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{(\log t)^n}{t} = 0. \tag{2}$$

Preuve

Montrons (1). D'après le lemme 6 nous avons pour tout $x > 0$:
$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$
De ce fait :
$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{1+x}{x} + \frac{x}{2}$$
et par conséquent :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$
Posons ensuite $x = \log t$, ainsi $t \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. D'où :
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log t}{t} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}} = 0.$$
Montrons (2). Le lemme 6 montre que nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:
$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \geq \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!},$$
ainsi
$$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}$$
et de ce fait :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
L'autre limite s'obtient également en posant $x = \log t$. $\square$

On montre de la même manière le résultat suivant.

***Corollaire* 8.**

(1) *Pour tout réel $b > 0$ nous avons :*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x^b \log x = 0.$$
(2) *Pour tous réels $a > 1$, $b > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ nous avons :*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n a^x = 0.$$

Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 9. Appelons f la restriction de $\sin x$ à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, $f = \sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$. Nous savons que f est dérivable et que $f'(x) = \cos(x) > 0$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. De ce fait f est strictement croissante et constitue une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} f : [-\pi/2, \pi/2] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

Par conséquent f admet une application réciproque $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, celle-ci est appelée *fonction arc sinus* et est notée arcsin. Nous déduisons que

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \\ y &\mapsto \arcsin y \end{aligned}$$

est une bijection strictement croissante, voir la figure 1.

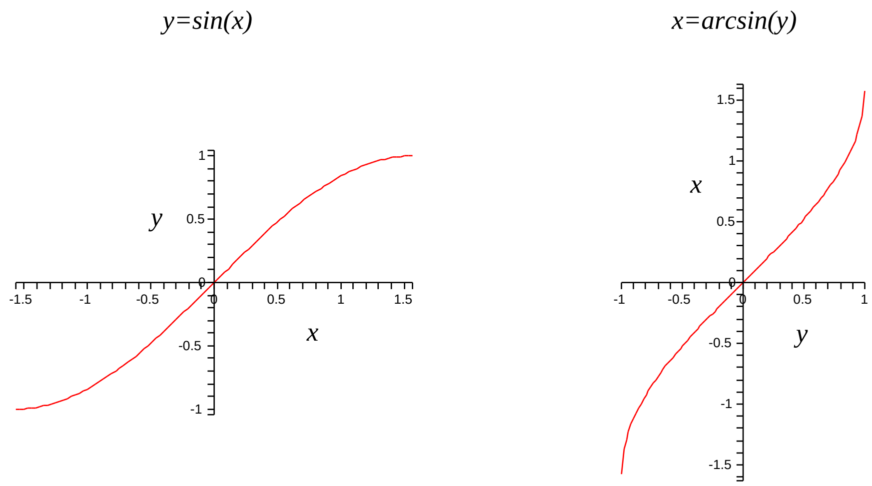


Figure 1

Proposition 10. *Nous avons :*

(1) $\sin(\arcsin y) = y, \ \forall y \in [-1, 1]$.
(2) $\arcsin(\sin x) = x, \ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
(3) *La fonction* arcsin *est continue sur* $[-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$ *et sa dérivée est donnée par :*

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

pour tout $y \in]-1, 1[$.

Preuve

Les propriétés (1) et (2) viennent du fait que la fonction arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Montrons (3). Nous posons $f = \sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$. Pour tout $y \in]-1, 1[$ nous avons à l'aide du théorème 1 :

$$\arcsin' y = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Remarquons que $\arcsin y \in]-\pi/2, \pi/2[$ et de ce fait $\cos(\arcsin y) > 0$ pour tout $y \in]-1, 1[$. Nous déduisons que $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2}$ pour tout $y \in]-1, 1[$. Nous avons donc :

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

pour tout $y \in]-1, 1[$, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 11. Il est important de remarquer que la propriété (2) de la proposition 10 n'est vraie *que pour* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Plus précisément il n'est pas vrai que $\arcsin(\sin x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. Par exemple nous avons $\sin 10\pi = 0$ et $\arcsin 0 = 0$, de ce fait $\arcsin(\sin 10\pi) = \arcsin 0 = 0$ et non pas 10π !

Définition 12. Appelons g la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \pi]$, $g = \cos_{|[0,\pi]}$. La fonction g est donc dérivable et nous avons $g'(x) = -\sin x < 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. De ce fait g est une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque est appelée *arc cosinus*, est notée arccos et est une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$ (voir la figure 2) :

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \\ y &\mapsto \arccos y \end{aligned}$$

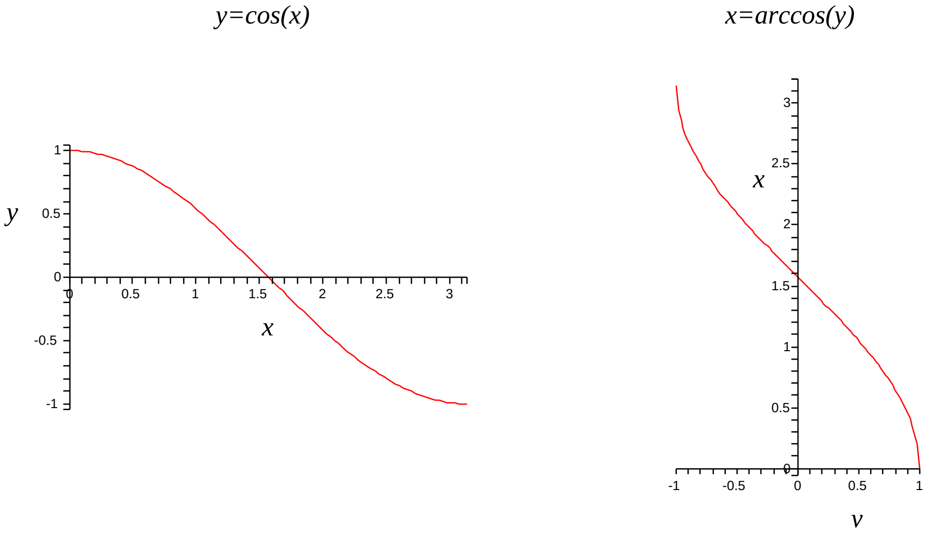


Figure 2

Proposition 13. *Nous avons :*

(1) $\cos(\arccos y) = y, \ \forall y \in [-1, 1]$.

(2) $\arccos(\cos x) = x, \ \forall x \in [0, \pi]$.

(3) *La fonction* arccos *est continue sur* $[-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$ *et sa dérivée est donnée par :*

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

pour tout $y \in \,]-1, 1[$.

La proposition 13 se montre de la même manière que la proposition 10

Remarque 14. Remarquons que la propriété (2) de la proposition 13 n'est vraie *que pour* $x \in [0, \pi]$. Plus précisément il n'est pas vrai que $\arccos(\cos x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. Par exemple nous avons $\cos 5\pi = -1$ et $\arccos(-1) = \pi$, de ce fait $\arccos(\cos 5\pi) = \arccos(-1) = \pi$ et non pas 5π !

***Corollaire* 15.** *Nous avons pour tout* $y \in [-1, 1]$ *:*

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}.$$

Preuve

Posons $f(y) = \arcsin y + \arccos y$ pour $y \in [-1, 1]$. La fonction f est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et d'après les propositions 10 et 13 nous avons :

$$f'(y) = \arcsin' y + \arccos' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

pour tout $y \in]-1,1[$. De ce fait f est une fonction constante, or pour $y = 0$ nous avons :

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

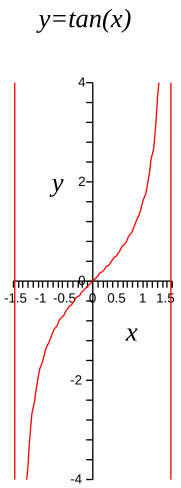
ce qui termine la preuve. □

Définition 16. Appelons h la restriction de la fonction tan à l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$, $h = \tan_{|]-\pi/2,\pi/2[}$. La fonction h est dérivable et nous avons pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$h'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0.$$

De ce fait h est une bijection strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $]\lim_{x \to -\pi/2} \tan x, \lim_{x \to \pi/2} \tan x[=]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$. Nous déduisons que la réciproque de h, appelée *arc tangente* et notée arctan, est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, voir la figure 3 :

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to]-\pi/2, \pi/2[\\ y &\mapsto \arctan y \end{aligned}$$



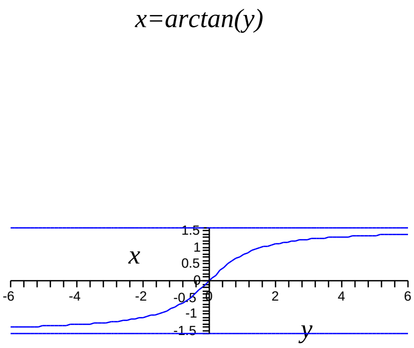


Figure 3

Proposition 17. *Nous avons :*

(1) $\tan(\arctan y) = y, \ \forall y \in \mathbb{R}$.
(2) $\arctan(\tan x) = x, \ \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(3) *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est donnée par :*

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2},$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

La preuve est analogue à celle de la proposition 10.

Remarque 18. La propriété (2) de la proposition 17 n'est vraie *que pour* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Plus précisément il n'est pas vrai que $\arctan(\tan x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Par exemple nous avons $\tan 10\pi = 0$ et $\arctan 0 = 0$, de ce fait $\arctan(\tan 10\pi) = \arctan(0) = 0$ et non pas 10π !

Rappels de trigonométrie
Pour tous réels a et b nous avons :

(1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
(2) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
(3)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

(4) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

Remarquons que la propriété (3) est une conséquence des propriétés (1) et (2). De plus la propriété (4) peut être retrouvée à l'aide de (1) en choisissant $b = -a$.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

Définition 19.

(1) On définit la fonction *cosinus hyperbolique*, notée cosh, en posant (voir la figure 4) :

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot \end{aligned}$$

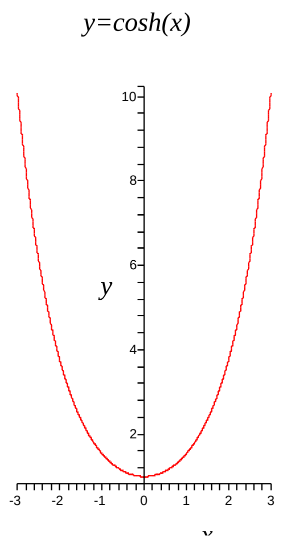


Figure 4

(2) On définit la fonction *sinus hyperbolique*, notée sinh, en posant (voir la figure 5) :

$$\begin{aligned}\sinh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\end{aligned}$$

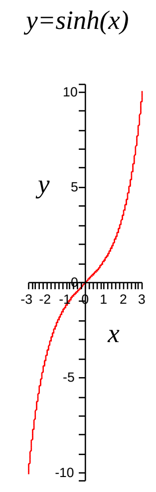


Figure 5

(3) On définit la fonction *tangente hyperbolique*, notée tanh, en posant (voir la figure 6) :

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

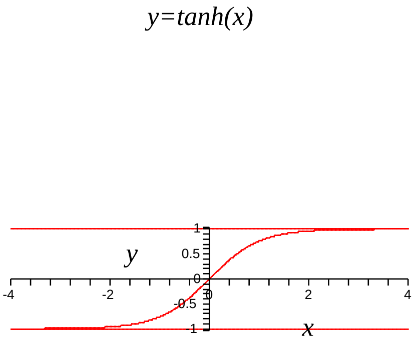


Figure 6

Proposition 20. (1) *La fonction* cosh *est paire et la fonction* sinh *est impaire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad \text{et} \quad \sinh(-x) = -\sinh x.$$

(2) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

(3) *Les fonctions* cosh *et* sinh *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et nous avons :*

$$\cosh' x = \sinh x \quad \text{et} \quad \sinh' x = \cosh x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(4) *La fonction* tanh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et nous avons*

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve

Toutes les relations se montrent facilement à partir des définitions. Montrons (1). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \quad \text{et} \quad \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x.$$

Montrons (2). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

Pour montrer (3) remarquons que cosh et sinh sont des sommes de fonctions dérivables, elles sont donc dérivables. De plus nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh' x = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\sinh' x = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Montrons (4). La fonction tanh est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais. De ce fait la fonction tanh est dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\tanh' x = (\frac{\sinh x}{\cosh x})' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

ce qui termine la preuve. □

Proposition 21.

(1) *La fonction* sinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante.*

(2) *La restriction de* cosh *à* $[0, +\infty[$ *est une bijection strictement croissante de* $[0, +\infty[$ *sur* $[0, +\infty[$, $\cosh_{|[0,+\infty[} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.

(3) *La fonction* tanh *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1, 1[$.

Preuve

Montrons (1). Nous avons $\sinh' x = \cosh x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De ce fait la fonction sinh est strictement croissante. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \sinh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty.$$

Par conséquent sinh est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Montrons (2). Nous avons $\cosh' x = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2 > 0$ pour tout $x > 0$. De plus $\cosh 0 = 1$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty.$$

De ce fait la la restriction de cosh à $[0, +\infty[$ est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

Montrons (3). Nous avons $\tanh' x = 1/\cosh^2 x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De ce fait la fonction tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{1} = -1.$$

Par conséquent tanh est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Proposition 22. *: Trigonométrie hyperbolique Pour tous réels a et b nous avons :*

$$\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\
\sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \\
\tanh(a+b) &= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}
\end{aligned}$$

Preuve

Ces relations se montrent directement à partir des définitions. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a e^b + e^{-a}e^{-b}}{2} \\
&= \frac{(e^a + e^{-a})e^b - e^{-a}e^b + (e^{-a} + e^a)e^{-b} - e^a e^{-b}}{2} \\
&= \frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})}{2} - \frac{e^{-a}e^b + e^a e^{-b}}{2} \\
&= 2\cosh a \cosh b - \frac{(e^{-a} + e^a)e^b + e^a e^b + (e^a + e^{-a})e^{-b} + e^{-a}e^{-b}}{2} \\
&= 2\cosh a \cosh b - \frac{(e^a + e^{-a})(e^{-b} - e^b) + e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} \\
&= 2\cosh a \cosh b + 2\sinh a \sinh b - \cosh(a+b)
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$2\cosh(a+b) = 2\cosh a \cosh b + 2\sinh a \sinh b,$$

ce qui donne la première relation.

La deuxième relation se montre de la même manière.

La troisième relation est une conséquence des deux premières :

$$\begin{aligned}
\tanh(a+b) &= \frac{\sinh(a+b)}{\cosh(a+b)} \\
&= \frac{\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b}{\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b} \\
&= \frac{(\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b)/(\cosh a \cosh b)}{(\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b)/(\cosh a \cosh b)} \\
&= \frac{\sinh a/\cosh a + \sinh b/\cosh b}{1 + \frac{\sinh a \sinh b}{\cosh a \cosh b}} \\
&= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 23. Appelons f la restriction de la fonction cosh sur l'intervalle $[0,+\infty[$, $f = \cosh_{|[0,+\infty[}$. Pour tout $x > 0$ nous avons $f'(x) = \sinh x > 0$. De ce fait f est une bijection strictement croissant de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f : [0,+\infty[&\to [1,+\infty[\\
x &\mapsto \cosh x
\end{aligned}$$

Par conséquent f admet une réciproque appelée *argument cosinus hyperbolique* et notée argcosh. Il ressort que argcosh est une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ (voir la figure 7) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{argcosh} : [1,+\infty[&\to [0,+\infty[\\
y &\mapsto \operatorname{argcosh} y
\end{aligned}$$

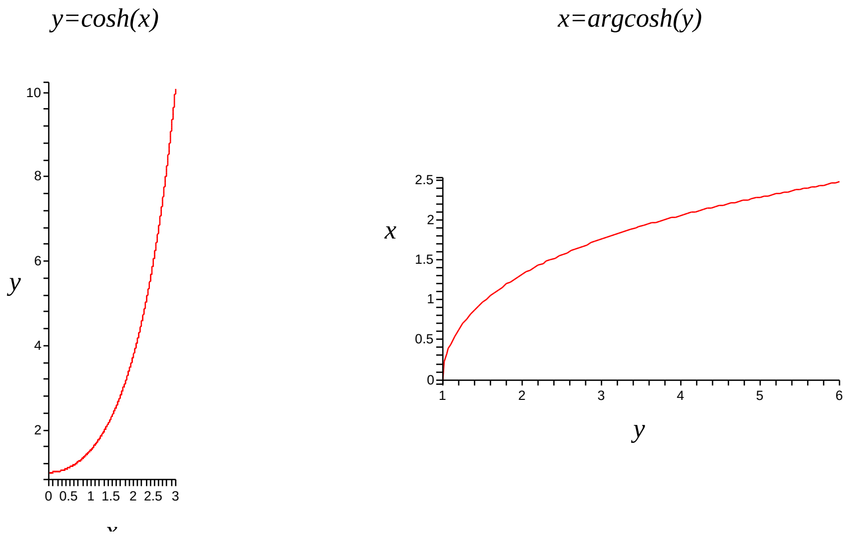


Figure 7

Proposition 24. *Nous avons :*

(1) $\forall y \in [1, +\infty[,\ \cosh(\operatorname{argcosh} y) = y$.
(2) $\forall x \in [0, +\infty[,\ \operatorname{argcosh}(\cosh x) = x$.
(3) *La fonction* argcosh *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et, pour tout* $y \in]1, +\infty[$, *nous avons*

$$\operatorname{argcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Preuve

Les affirmations (1) et (2) sont claires.

Montrons (3). La fonction cosh est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\cosh' x = \sinh x \neq 0$ pour tout $x > 0$. Nous déduisons à l'aide du théorème 1 que la fonction réciproque argcosh est dérivable sur $]\cosh 0, \lim_{x \to +\infty} \cosh x[=]1, +\infty[$. De plus, nous avons pour tout $y \in]1, +\infty[$:

$$\operatorname{argcosh}' y = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{argcosh} y)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{argcosh} y)}.$$

Rappelons que $\operatorname{argcosh} y > 0$ pour tout $y > 1$, de ce fait $\sinh(\operatorname{argcosh} y) > 0$ pour tout $y > 1$. Nous avons donc :

$$\sinh(\operatorname{argcosh} y) = \sqrt{\sinh^2(\operatorname{argcosh} y)} = \sqrt{\cosh^2(\operatorname{argcosh} y) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

et de ce fait :

$$\operatorname{argcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

ce qui termine la preuve. □

Définition 25. Rappelons que la fonction sinh est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De ce fait elle admet une réciproque, celle-ci est appelée *argument sinus hyperbolique* et est notée argsinh. Il ressort que la fonction argsinh est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, voir la figure 8 :

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \operatorname{argsinh} y \end{aligned}$$

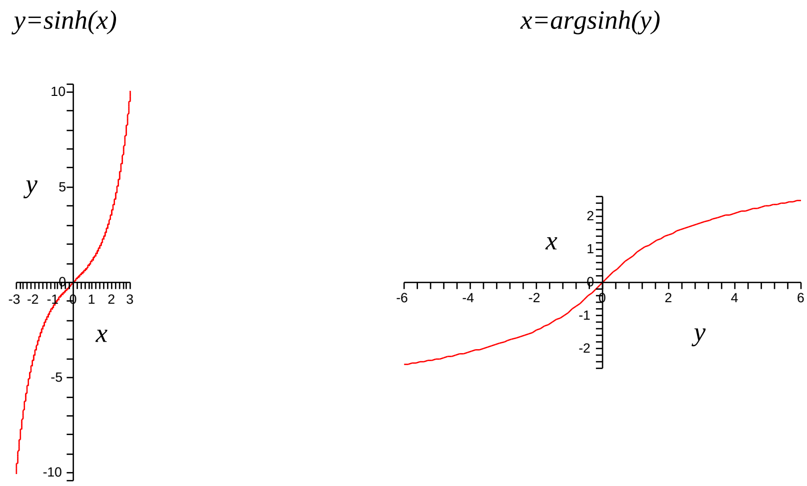


Figure 8

Proposition 26. *Nous avons :*

(1) $\forall y \in \mathbb{R},\ \sinh(\operatorname{argsinh} y) = y$.
(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsinh}(\sinh x) = x$.
(3) *La fonction* argsinh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*, nous avons*

$$\operatorname{argsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

La preuve est analogue à celle de la proposition 24

Définition 27. Rappelons que la fonction tanh est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. De ce fait elle admet une réciproque, celle-ci est appelée *argument tangente hyperbolique* et est notée argtanh. La fonction argtanh est donc une bijection strictement croissante de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$ (voir la figure 9) :

$$\begin{aligned} \operatorname{argtanh} :]-1,1[&\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \operatorname{argtanh} y \end{aligned}$$

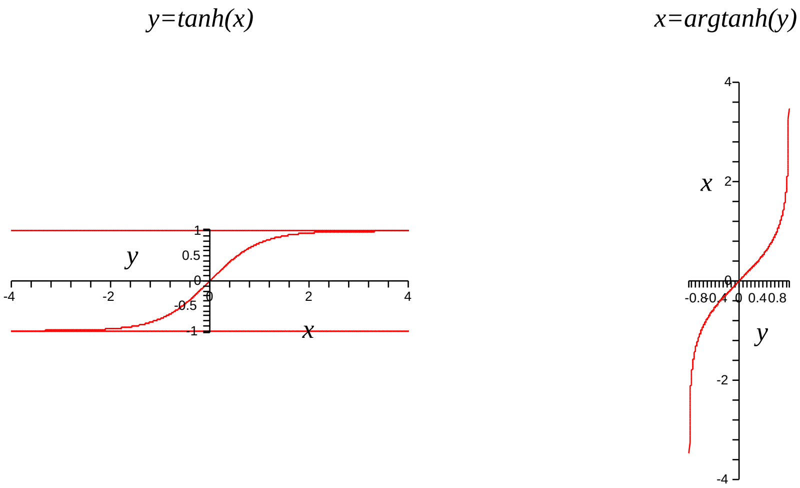


Figure 9

Proposition 28. *Nous avons :*

(1) $\forall y \in \,]-1,1[,\ \tanh(\mathrm{argtanh}\ \ y) = y$.
(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argtanh}(\tanh x) = x$.
(3) *La fonction* argtanh *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et, pour tout* $y \in \,]-1,1[$*, nous avons*

$$\mathrm{argtanh}'\ y = \frac{1}{1-y^2}.$$

La preuve est analogue à celle de la proposition 24

Il existe une autre expression pour les fonctions hyperboliques réciproques.

Théorème 29.

(1) *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *nous avons :*

$$\mathrm{argsinh}\ y = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

(2) *Pour tout* $y \in [1,+\infty[$ *nous avons :*

$$\mathrm{argcosh}\ y = \log(y + \sqrt{y^2-1}).$$

(3) *Pour tout* $y \in \,]-1,1[$ *nous avons :*

$$\mathrm{argtanh}\ y = \frac{1}{2}\log(\frac{1+y}{1-y}).$$

Preuve

Les preuves de ces trois affirmations sont analogues, nous ne montrerons donc que la première.

Considérons la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \operatorname{argsinh} y - \log(y + \sqrt{y^2+1}). \end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et nous avons pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(y) &= \operatorname{argsinh}' y - (\log(y + \sqrt{y^2+1}))' \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{(y+\sqrt{y^2+1})'}{y+\sqrt{y^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1+\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{y^2+1}}}{y+\sqrt{y^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{y^2+1}(y+\sqrt{y^2+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction f est constante. Nous déduisons que pour tout $y \in \mathbb{R}$ nous avons $f(y) = f(0)$. Une simple vérification montre que $f(0) = 0$. Par conséquent nous obtenons $f \equiv 0$, c'est à dire :

$$\operatorname{argsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2+1}), \ \forall y \in \mathbb{R},$$

ce qui termine la preuve. □