Blanchard Etienne
A2. RECHERCHE SCIENTIFIQUE

L'axe majeur de mes recherches est celui des Algèbres d'Opérateurs.
Au cours de ma carrière scientifique au CNRS (à l'IMJ (UMR 6206, Marseille) de 1995 à 2000 puis à l'IMJ (UMR 7586, Paris)), je me suis plus particulièrement concentré sur les thèmes suivants.

a) Les déformations de C*-algèbres.

Les familles de C*-algèbres de Hopf introduites par Woronowicz correspondent à des champs (continus) de C*-algèbres sur un espace compact X au sens de Dixmier (ou à des $C(X)$-algèbres (continues) au sens de Kasparov). Un étude plus genérale de ces structures m'a notamment amené à construire :
– un équivalent $C(X)$-linéaire du théorème de Gelfand-Naimark-Segal pour les $C(X)$-algèbres continues séparables $A = (A_x)$: il existe toujours une famille de $*$-représentations fidèles $\{\sigma_x : A_x \hookrightarrow \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))\,;\, x \in X\}$ telle que pour toute section $a = (a_x) \in A$, l'application $x \mapsto \sigma_x(a_x)$ soit $*$-fortement continue et la fonction $x \mapsto \|\sigma_x(a_x)\|$ soit continue ([2, 4]),
– une caractérisation des champs semi-continus inférieurement de C*-algèbres séparables $(A, \{\theta_x\})$ sur un espace compact X : il existe toujours une $C(X)$-représentation $\sigma : A \to \mathcal{L}_{C(X)}(\ell^2(\mathbb{N}) \otimes C(X))$ telle que $\theta_x(A) \cong \sigma_x(A) \subset \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ pour tout point $x \in X$ ([8]),
– une caractérisation des $C(X)$-algèbres continues nucléaires séparables, caractérisation que Kirchberg a étendue au cadre exact de la manière suivante : une $C(X)$-algèbre continue séparable A est une C*-algèbre exacte si et seulement si il existe un plongement $C(X)$-linéaire de A dans la $C(X)$-algèbre continue $C(X; O_2)$, où O_2 est la C*-alèbre de Cuntz unifère engendrée par deux isométries s_1, s_2 satisfaisant la relation $1 = s_1 s_1^* + s_2 s_2^*$ ([6]),
– une caractérisation des champs continus séparables de systèmes opératoriels étendant celle obtenue par Ruan pour les systèmes opératoriels séparables ([13]).

b) Les C*-algèbres de Hopf (de dimension finie)

L'étude des C*-algèbres de Hopf de dimension finie m'a permis d'obtenir une borne explicite du nombre de C*-algèbres de Hopf de dimension finie donnée ([7]).

Dans un article en commun avec Baaj et Skandalis, une analyse plus fine des structures sous-jacentes m'a ensuite amené à étudier les sous-objets des C*-algèbres de Hopf de dimension finie, i.e. l'équivalent des «sous-groupes» d'un groupe fini ([6]).

c) Les produits amalgamés de champs de C*-algèbres.

L'étude des champs de coproduits associés aux déformations de C*-algèbres de Hopf m'a conduit vers l'étude des produits amalgamés de $C(X)$-algèbres. Il existe déjà plusieurs notions naturelles de produit pour les C*-algèbres : produits tensoriels (minimal ou maximal) et produits libres (réduits ou plein). Et les produits amalgamés au dessus de la C*-algèbre $C(X)$ (des fonctions continues sur l'espace compact X) permettent de généraliser ces objets au cadre des $C(X)$-algèbres ([3, 9, 13]). Une question posée par S. Wassermann a alors été de savoir si la sous-catégorie des $C(X)$-algèbres continues était stable par ces constructions.

Pour répondre à cette question, j'ai tout d'abord démontré avec S. Wassermamnn un théorème d'extension de Tietze pour les $C(X)$-algèbres : étant donné un espace compact métrique X, un sous-espace fermé Y de X et une C(Y)-algèbre continue A, il existe toujours une $C(X)$-algèbre continues D (i.e. un champ continu de C*-algèbres sur X) dont la restriction $D_{|Y}$ à Y est isomorphe au cône $C_0((0,1];A)$. Cela permet de montrer que si X est un espace compact sans point isolé, alors une $C(X)$-algèbre continue A est exacte (respectivement nucléaire) si et seulement si le plus petit (respectivement le plus grand) produit tensoriel amalgamé au-dessus de $C(X)$ de A par n'importe quelle $C(X)$-algèbre continue B est toujours continu. Notons que ce résultat est faux si l'espace X admet au moins un point isolé. ([12])

De même, une telle $C(X)$-algèbre séparable unifère continue A est une C*-algèbre exacte si et seulement si pour toute $C(X)$-algèbre séparable unifère continue B et tous champs continus d'états fidèles $\phi : A \to C(X)$, $\psi : B \to C(X)$, le produit libre amalgamé *réduit* $(A,\phi)*_{C(X)}(B,\psi)$ est continu. Mais il n'y a pas de telle caractérisation pour les produits libres amalgamés pleins : le produit libre amalgamé *plein* de deux $C(X)$-algèbres continues A et B est toujours continu. ([13])

d) L'étude des C*-algèbres purement infinies non simples.

Un programme de classification à isomorphisme près des C*-algèbres nucléaires à travers des invariants essentiellement K-théoriques, a été lancé par Elliott. Un des résultats marquants obtenu par Kirchberg fut la classification complète à KK-équivalence près des C*-algèbres A nucléaires *simples* purement infinies (i.e. telles que $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty$, où $\mathcal{O}_\infty$ est la C*-algèbre de Cuntz unifère engendrée par une famille dénombrable d'isométries dont les images sont 2 à 2 orthogonales).

L'étude du cas général, i.e. la recherche d'un analogue stellaire dans le cas non simple, a fait l'objet de deux articles en collaboration avec Kirchberg ([3, 4]). Nous avons introduit différentes notions de 'C*-algèbre purement infinie' dans le cas non simple et étudié le rapport entre elles. En particulier, nous montrons que si A est une C*-algèbre séparable, stable, nucléaire et dont l'espace des idéaux primitifs X est séparé, alors A absorbe $\mathcal{O}_\infty$ (ie $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty$) si et seulement si chaque fibre A_x $(x \in X)$ absorbe $\mathcal{O}_\infty$.

La recherche d'une C*-algèbre nucléaire ne satisfaisant pas la formule des coefficients universels (propriété UCT) m'a également amené à étudier plus généralement les déformations de C*-algèbres proprement infinies (au lieu de purement infinies). Dans un article écrit avec Randi et Rørdam, nous montrons notamment que tout champ continu unifère de C*-algèbres proprement infinies est lui-même proprement infini si et seulement si toute C*-algèbre unifère proprement infinie A est K_1-injective, i.e. la flèche $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}^0(A) \to K_1(A)$ est toujours injective. ([14])

References

[1] E. Blanchard, *Dualité en KK_S-théorie* (d'après S. Baaj et G. Skandalis), (1990) Paris 7 D.E.A. memoir.

[2] E. Blanchard, *Représentations de champs de C*-algèbres*, C. R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), 911–914.

[3] E. Blanchard, *Tensor products of C(X)-algebras over C(X)*, Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992) Astérisque **232** (1995), 81–92.

[4] E. Blanchard, *Déformations de C*-algèbres de Hopf*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), 141–215.

[5] E. Blanchard, *Subtriviality of continuous fields of nuclear C*-algebras, with an appendix by E. Kirchberg*, J. Reine Angew. Math. **489** (1997), 133–149.

[6] S. Baaj, E. Blanchard, G. Skandalis, *Unitaires multiplicatifs en dimension finie et leurs sous-objets*, Annales de l'Inst. Fourier **49** (1999), 1305–1344.

[7] E. Blanchard, *On finiteness of the N-dimensional Hopf C*-algebras*, Operator theoretical methods (Timisoara, 1998), Theta Found., Bucharest, (2000), 39–46.

[8] E. Blanchard, *A few remarks on C(X)-algebras*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **45** (2001), 565–576.

[9] E. Blanchard, K. Dykema, *Embeddings of reduced free products of operator algebras*, Pacific J. Math. **199** (2001), 1–19.

[10] E. Blanchard, E. Kirchberg, *Non-simple purely infinite C*-algebras: the Hausdorff case*, J. Funct. Anal. **207** (2004), 461–513

[11] E. Blanchard, E. Kirchberg, *Global Glimm halving for C*-bundles*, J. Op. Th. **52** (2004), 385–420

[12] E. Blanchard, S. Wassermann, *Exact C*-bundles*, Houston J. Math. **33** (2007), 1147–1159

[13] E. Blanchard, *Amalgamated free products of C*-bundles*, Proc. Edinburgh Math. Soc., à paraître

[14] E. Blanchard, R. Rohde, M. Rørdam, *Properly infinite C(X)-algebras and K_1-injectivity.* J. Non Commut. Geom., à paraître

[15] E. Blanchard, *K_1-injectivity for properly infinite C*-algebras* prepublication.