Théorie des Catégories : Limite et Colimite

Farouk Mangat

25 avril 2019

Définitions

La notion de limite et la notion duale de colimite est conceptuellement très proche de la notion de limite rencontrée en analyse.

Soient deux catégories $\mathcal{I}$ et $\mathscr{C}$ données. On se donne un diagramme, qui n'est autre qu'un foncteur, $F : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$. C'est l'analogue d'une famille d'ensemble. La catégorie I va ainsi permettre d'indexer les objets de $\mathscr{C}$. On peut faire l'analogie avec une suite réelle qui est définie comme une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ou encore $u_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

On va choisir un diagramme particulier, le diagramme constant que l'on notera :

$$X : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$$

qui envoie tout objet de $\mathscr{I}$ dans $X \in \mathscr{C}$.

En premier lieu, on se donne un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

élément du foncteur $F : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$. Ainsi $D, A \in \mathscr{I}$ et $C, B \in \mathscr{C}$.

On se donne ensuite un cône comme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted] \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[ddrr] & & \\
& D \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
& A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
$$

Dans ce diagramme « tout commute » et on parlera de transformation naturelle $X \Longrightarrow F$ dans ce cas.

La limite de ce diagramme F est en quelque sorte un cône limite du cône précédent. Plus précisément :

Définition : La limite du diagramme $F : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ est un objet $\lim F$ dans la catégorie $\mathscr{C}$ couplé à une transformation naturelle $\eta : \lim F \Longrightarrow F$ vérifiant la propriété suivante :
Pour tout objet X et pour toute transformation naturelle $\alpha : X \Longrightarrow F$, il existe un unique morphisme $f : X \to \lim F$ tel que $\alpha = \eta \circ f$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "\alpha"] \\
\lim F \arrow[d, "\eta"'] \\
F
\end{tikzcd}
$$

Rassemblés dans un couple noté $(\lim F, \eta)$, l'objet et le morphisme ainsi construits sont universels dans le sens suivant : Si l'on choisit un autre couple (X', α') alors on trouvera un unique morphisme f' de manière à avoir $\alpha' = \eta \circ f'$.

En détaillant un peu plus notre définition de la limite :

Définition : La limite du diagramme $F : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ est un objet $\lim F$ dans la catégorie $\mathscr{C}$ couplé à une transformation naturelle $\eta_A : \lim F \Longrightarrow A$ pour tout A dans le diagramme satisfaisant $\eta_B = \phi_{AB} \circ \eta_A$ pour tout morphisme $\phi_{AB} : A \to B$ dans le diagramme. De plus ces applications vérifient la propriété suivante :
Pour tout objet X et pour tout ensemble de morphismes $\alpha_A : X \to A$ satisfaisant $\alpha_B = \phi_{AB} \circ \alpha_A$, il existe un unique morphisme $f : X \to \lim F$ tel que $\alpha_A = \eta_A \circ f$ pour tout objet A dans le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dotted] \arrow[ddl, bend right, "\alpha_A"'] \arrow[ddr, bend left, "\alpha_B"] & \\
& \lim F \arrow[dl, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta_B"'] & \\
A \arrow[rr, "\phi_{AB}"'] & & B
\end{tikzcd}$$

En résumé, pour tout objet X dans la catégorie $\mathscr{C}$, on a une bijection entre l'ensemble des morphismes $X \to \lim F$ et l'ensemble des transformations naturelles $X \to F$:

$$Hom\,(X, \lim F) \simeq Nat\,(X, F)$$

Exercices

- Essayer de définir la colimite d'un diagramme en considérant le cône sous F : $F \Longrightarrow X$ (il suffit d'inverser quelques flèches !)

- Soit $\mathscr{C}$ la catégorie $2\mathbb{Z}$. Un morphisme $n \longrightarrow m$ dans cette catégorie est un entier k tel que $n = mk$. Par exemple, 3 définie une flèche $6 \overset{3}{\longrightarrow} 2$ car $6 = 2 \times 3$. Ainsi, il n'y a pas de flèche du type $8 \longrightarrow 6$.

Montrer que 2 est la limite d'un diagramme particulier dans $2\mathbb{Z}$.

Considérer une catégorie I et un foncteur$I \longrightarrow 2\mathbb{Z}$ et une transformation naturelle η , et montrer que 2 et η satisfont la propriété universelle donnée plus haut. Le diagramme possède-t–il une colimite ? Si oui, la donner.

Limites et Colimites particulières

Selon la forme de notre catégorie I, on obtient les fameuses notions de produit, de limite inductive ou directe etc.

Voici un tableau qui résume ce fait :

Forme de la catégorie I	Limite	Colimite
vide	Objet final	Objet initial
$\bullet \ \bullet \ \bullet \bullet$	Produit	Coproduit
$\cdots \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$	Limite inverse	_ _ _ _ _ _ _ _ _
$\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \cdots$	_ _ _ _ _ _ _ _ _	Limite directe
$\begin{smallmatrix} & \bullet \\ & \downarrow \\ \bullet & \rightarrow & \bullet \end{smallmatrix}$	Produit fibré.	_ _ _ _ _ _ _ _ _
$\begin{smallmatrix} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{smallmatrix}$	_ _ _ _ _ _ _ _ _	Poussé en avant
$\bullet \rightrightarrows \bullet$	equalizer	coequalizer

Dans le cas $\begin{smallmatrix} & \bullet \\ & \downarrow \\ \bullet & \rightarrow & \bullet \end{smallmatrix}$ on obtient comme figure du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

et la figure de la propriété du cône :

$$\begin{tikzcd}
A \underset{B}{\times} E \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "\pi_A"] & E \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "i"] \arrow[drr, "p_E"] \arrow[ddr, "p_A"'] & & \\
& A \underset{B}{\times} E \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "\pi_A"] & E \arrow[d, "p"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Traduction : il existe une unique application i de l'ensemble X vers le produit fibré qui factorise le diagramme :

$p_A = \pi_A \circ i$et $p_E = \pi_E \circ i$. Autrement dit, le produit fibré est la limite (au sens des catégories) du diagramme formé à l'aide des deux applications initiales f et p. Il est aussi possible de le voir comme le produit (au sens des catégories) dans une catégorie des morphismes vers B.

Références

[math3ma] http ://www.math3ma.com