Paramétrer les sous-espaces linéaires des variétés projectives :
cubic 4-folds & GM varieties

Setting : $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ var proj lisse (déf par des équations poly. homog.) $\rightsquigarrow$ $\{\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \subseteq X\} =: F_k(X)$ schéma d'Hilbert

① Droites sur une hypersurface $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+2})$ déf par F poly homog de deg d

Rmq : $F \in \mathrm{Sym}^d(\mathbb{C}^{n+2})^\vee \longrightarrow \mathrm{Sym}^d\,\mathcal{U}^\vee \ni s_F$

$\mathbb{P}(P) = \ell \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}} \rightsquigarrow [P] \in Gr(2, n+2)$: $s_F|_{[P]} = F|_P$: $Z(s_F) = F_1(X)$

$\mathcal{U}_{[\ell]} = P \subseteq \mathbb{C}^{n+2}$; $\mathcal{U}$ sur $Gr(2,n+2)$

où s_F séc du fibré $\mathrm{Sym}^d\,\mathcal{U}^\vee$ (rk $d+1$)

Prop : Si
$$Z(s_F) = \begin{cases} \emptyset \\ \mathrm{codim}_{Gr(2,n+2)} = d+1 \end{cases} \Rightarrow [Z(s_F)] = c_{d+1}(\mathrm{Sym}^d\,\mathcal{U}^\vee)$$
$[Z(s_F)] \in A^{2n-(d+1)}(Gr(2,n+2))$

Si $2n \geq d+1$, $c_{d+1}(\mathrm{Sym}^d\,\mathcal{U}^\vee) \neq \emptyset \Rightarrow Z(s_F) = F_1(X) \neq \emptyset$

- $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}} \leftrightsquigarrow F \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}}(d)| = \mathbb{P}$

$\ell \subseteq X \rightsquigarrow [\ell] \in Gr(2, n+2)$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{I} = \{(F,\ell) \in \mathbb{P} \times Gr(2,n+1) \mid \ell \subseteq X_F\} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbb{P} & & Gr(2,n+2) \end{tikzcd}$$

i) q fibré projectifs dont les fibres ont dimension $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}}(d)| - |\mathcal{O}_\ell(d)|$

ii) $p^{-1}(F) = F_1(X_F) = \emptyset$ si $d+1 \leq 2n$ → p surj entre var lisse $\Rightarrow$ gén lisse

Prop $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ hyp. gén, $F_1(X)$ est lisse de dim $2n-(d+1)$

$\boxed{d=3}$ (Th. déf) $\Rightarrow$ **Th** $\forall$ cubique lisse X de dim n, $F_1(X)$ est lisse de dim $2n-4$

a) Surf cubique : $c_4(\mathrm{Sym}^3 X) = 27$ droites

b) $X \subseteq \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ (X) surface (de type gén)

c) $X \subseteq \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ cubique de dim 4, $c_1(F_1(X)) = 0$, $\dim F_1(X) = 4$

[Beauville-Donagi]

- $F_1(X)$ variété hyper-Kähler → **Déf** X hK si var cpx, cpte de Kähler, simpl. connexe et $H^0(X, \Omega^2_X) = \mathbb{C}\cdot\sigma_X$ partout non dégénérée

- $\mathcal{L} = \{(x,\ell) \in X \times F_1(X) \mid \ell \ni x\}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & F_1(X) \end{tikzcd}$$

$\alpha = q_* p^* : H^4(X, \mathbb{Z}) \to H^4(\mathcal{L}, \mathbb{Z}) \to H^2(F_1(X), \mathbb{Z})$

② Variétés de Gushel-Mukai [après Deb-Kuz]   classification de variétés de Fano X avec $\mathrm{Pic}\, X = \mathbb{Z}\cdot H$, $-K_X = (n-2)H$, $H^n = 10$

DÉF
- GM de dim 5 : $X_5 = Q \cap Gr(2,V_5) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2 V_5) \simeq \mathbb{P}^9$ (Q quad., $\mathbb{P}$l.) inter. transverse
- GM de dim 4 : $X_4 = H \cap X_5$ (H hyp) inter. transverse
- GM de dim 6 : $X_6 \xrightarrow[2:1]{} Gr(2,V_5) \supseteq X_5$ ram le long X_5 (GM dim 5)

Var hK associé à un GM | X GM, $V_5 \subseteq V_6$ ← quad. cpt of X; $V_6 \simeq$ quad qui contiens $Gr(2,V_5)$

[O'G] $\tilde{Y} \xrightarrow[2:1]{} Y \subset \mathbb{P}(V_6)$ EPW sextique : X gén, $\tilde{Y}$ hK de dim 4 "double EPW sextique"

[IKKR] $\tilde{Z} \xrightarrow[2:1]{} Z \subset Gr(3,V_6)$ codim 3 : X gén, $\tilde{Z}$ hK de dim 6 "EPW cube"

$\boxed{\dim X = 4}$ Th [DK] X gén, • $\tilde{\sigma} : F_1(X) \to \tilde{Y} \cap \mathbb{P}(V_5)$ bir

• $H^4(X,\mathbb{Z})_{van} \xrightarrow{\sim} H^2(\tilde{Y},\mathbb{Z})_{prim}$ iso de HS

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}_1(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\ X & & F_1(X) \arrow[r, "\tilde{\sigma}", "\sim"'] & \tilde{Y} \cap \mathbb{P}(V_5) \arrow[r, hook] & \tilde{Y} \end{tikzcd}$$

inters. corr.   Lefschetz hyperplan

$\boxed{\dim X = 6}$ Th [DK] X gén, • $F_1(X) \to \mathbb{P}(V_5)$ dominant, fibre

• $F_2(X) = F_2^{\sigma}(X) \sqcup F_2^{\tau}(X)$

- $\tilde{\sigma} : F_2^{\sigma}(X) \to \tilde{Y} \cap \mathbb{P}(V_6)$ et $H^6(X,\mathbb{Z})_{van} \xrightarrow{\sim} H^2(\hat{Y},\mathbb{Z})_{prim}$

$\tilde{\tau} : F_2^{\tau}(X) \xrightarrow[2:1]{} Z \cap Gr(3,V_5)$

Goal : - $F_2^{\tau}(X) \simeq \tilde{Z} \cap Gr(3,V_5)$ pour X gén

- same pf via intersect var $H^6(X,\mathbb{Z})_{prim} \xrightarrow{\sim} H^2(\tilde{Z},\mathbb{Z})_{prim}$ (on sait déjà qu'ils sont iso depuis [KKM])