ALGEBRAIC TOPOLOGY
Homework 1

1. Let X be a path-connected topological space, and $x_0 \in X$ a point. Show that the map $S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ induced by the constant map $X \to \{x_0\}$ is chain homotopic to the map $\varepsilon : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ for wich $\varepsilon_i = 0$ for $i > 0$ and ε_0 sends all generators $x \in X$ to x_0.

Remark: Together with the result proven in class, this gives a direct proof of the fact that if $X \subset \mathbf{R}^n$ is a convex subset, the identity map of X and the constant map $X \to \{x_0\}$ induce chain homotopic maps on $S_\bullet(X)$.

2. A subspace $T \subset X$ is a *retract* of the topological space X if there is a continuous map $r : X \to T$ with $r \circ i$ the identity of T, where $i : T \to X$ is the inclusion map.

In this situation consider the induced maps $i_* : H_i(T) \to H_i(X)$ and $r_* : H_i(X) \to H_i(T)$. Prove that i_* is injective, r_* is surjective, and there is a direct sum decomposition $H_i(X) \cong \ker(r_*) \oplus \operatorname{im}(i_*)$.

3. Compute the homology groups of the complement of two points in $\mathbf{R}^n$.

[*Hint:* $\mathbf{R}^n \setminus \{x_1, x_2\} = (\mathbf{R}^n \setminus \{x_1\}) \cap (\mathbf{R}^n \setminus \{x_2\})$.]

4. Compute the homology groups of $S^1 \times S^1$.

[*Hint:* Identify S^1 with the unit circle in $\mathbf{R}^2$ and cover it by two open sets U, V given by the intersections with the open half-planes $\{y > -1/2\}$ and $\{y < 1/2\}$. Then consider the open covering of $S^1 \times S^1$ by $S^1 \times U$ and $S^1 \times V$.]

5. Identify S^1 with the unit circle in $\mathbf{R}^2$, and set $P_- := (-1, 0), P_+ := (1, 0)$.

Let $z : \Delta^1 \to S^1$ be the 1-cycle such that $z(0) = z(1) = P_-$ and 'z runs through the circle clockwise'. Also, let $z_+, z_- : \Delta^1 \to S^1$ be the two 1-chains with $z_+(0) = z_-(0) = P_-$ and $z_+(1) = z_-(1) = P_+$ that run through the two half-circles from P_- to P_+, in the upper and lower half-planes, respectively. [Here we denoted the j-th face of Δ^1 by j $(j = 0, 1)$.]

Finally, consider the piece of the Mayer–Vietoris sequence

$$H_1(S^1) \xrightarrow{\partial} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

where $U, V \subset S^1$ be the open subsets as in the previous hint.

a) Show that the class of $P_- - P_+$ generates $\ker(\Delta)$.

b) Check that the map ∂ sends the class of $z_+ - z_-$ to that of $P_- - P_+$. [*Hint:* Notice that $z_+ - z_-$ lies in $S_1^{\{U,V\}}(S^1)$.]

c) Check that z and $z_+ - z_-$ have the same class in $H_1(S^1)$.

d) Conclude that the class of z generates $H_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

Soluzione esercizio 1.1

Sia $\sigma_0^{(i)} : \Delta_i \to X$ la mappa costante $\sigma_0^{(i)} \equiv x_0$. Sia inoltre: $k_i : S_i(X) \to S_{i+1}(X)$ definita come

$$k_i(\sigma) = \begin{cases} 0 & i \text{ pari} \\ \sigma_0^{(i+1)} & i \text{ dispari} \end{cases} \quad \text{sui generatori } \sigma : \Delta_i \to X \text{ e poi estesa per linearità a } S_i(X).$$

Dico che k data dalle k_i è una chain-homotopy fra $\gamma, \epsilon : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$, dove γ è la mappa indotta da $X \to x_0$, quindi $\gamma(\sigma) = (X \to x_0) \circ \sigma = \sigma_0^{(i)}$.
Osserviamo che $(\gamma_0 - \epsilon_0)(x) = x_0 - x_0 = 0$, $\gamma_i - \epsilon_i = \gamma_i \ \forall i > 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & S_{2i}(X) \arrow[r, "d_{2i}"] \arrow[dl, "0"'] \arrow[d, "\sigma_0^{(2i)}"] & S_{2i-1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, "\sigma_0^{(2i)}"'] & \cdots \arrow[r] & S_1(X) \arrow[r, "d_1"] \arrow[dl, "\sigma_0^{(2)}"'] \arrow[d, "\sigma_0^{(1)}"] & S_0(X) \arrow[dl, "0"'] \arrow[d, "0"] \\
S_{2i+1}(X) \arrow[r, "d_{2i+1}"'] & S_{2i}(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & S_2(X) \arrow[r, "d_2"'] & S_1(X) \arrow[r, "d_1"'] & S_0(X)
\end{tikzcd}$$

È facile vedere che $d_1(k_0(\sigma)) = d_1(0) = 0 = \gamma_0 - \epsilon_0$.
Ora $\forall i > 0$, bisogna verificare che $d_{i+1} \circ k_i(\sigma) + k_{i-1} \circ d_i(\sigma) = \gamma(\sigma) = \sigma_0^{(i)}$.

- i pari: $k_i = 0$. Indichiamo con $\sigma_j = \sigma \circ d_j^i : \Delta_{i-1} \to X$, allora

$$k_{i-1}(d_i(\sigma)) = k_{i-1}\left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \sigma_j\right) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j k_{i-1}(\sigma_j) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \sigma_0^{(i)} = \sigma_0^{(i)}$$

  dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che i è pari, quindi nella somma ci sono un numero dispari di termini uguali a segni alterni.

- i dispari: $k_{i-1} = 0$ e $k_i(\sigma) = \sigma_0^{(i+1)}$, e $\sigma_0^{(i+1)} \circ d_j^{i+1} = \sigma_0^{(i)}$, quindi:

$$d_{i+1}(k_i(\sigma)) = d_{i+1}\left(\sigma_0^{(i+1)}\right) = \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \sigma_0^{(i)} = \sigma_0^{(i)}$$

  dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $i+1$ è pari, quindi nella somma ci sono un numero dispari di termini uguali a segni alterni.

Quindi in entrambi i casi l'uguaglianza $d_{i+1} \circ k_i(\sigma) + k_{i-1} \circ d_i(\sigma) = \sigma_0^{(i)}$ è verificata.

Soluzione esercizio 1.2

Ogni $f : X \to Y$ funzione continua fra spazi topologici, induce un morfismo di complessi

$$S_\bullet(f) : S_\bullet(X) \to S_\bullet(Y) \text{ dove } S_i(f)\sigma = f \circ \sigma.$$

Considero il funtore H_i: questo associa ad ogni complesso di gruppi abeliani $A_\bullet$ l'omologia i-esima del complesso, $H_i(A_\bullet)$, e ad ogni morfismo di complessi $\varphi : A_\bullet \to C_\bullet$ una mappa $H_i(\varphi) : H_i(A_\bullet) \to H_i(C_\bullet)$ indotta da

$$B_i(A) \subset Z_i(A) \xrightarrow{\varphi|_{Z_i(A)}} Z_i(C) \twoheadrightarrow H_i(C) \qquad H_i(\varphi)[z]_{H_i(A)} = [\varphi(z)]_{H_i(C)}$$

Dato $T \subset X$, con $i : T \hookrightarrow X$, $r : X \to T$, otteniamo due mappe indotte $H_i(i) = i_* : H_i(T) \to H_i(X)$ e $H_i(r) = r_* : H_i(X) \to H_i(T)$. Poichè per ipotesi $r \circ i = id_T$, per funtorialità

$$id_{H_i(T)} = H_i(id_T) = H_i(r \circ i) = H_i(r) \circ H_i(i) = r_* \circ i_*$$

quindi i_* è iniettiva e r_* è surgettiva.

Mostro che $H_i(X) = \operatorname{Ker}(r_*) \oplus \operatorname{Im}(i_*)$. Sappiamo che $\operatorname{Ker}(r_*), \operatorname{Im}(i_*) \lhd H_i(X)$: bisogna quindi dimostrare che sono in somma diretta (cioè la loro intersezione è banale) e che ogni elemento di $H_i(X)$ si scrive come somma di un elemento in $\operatorname{Ker}(r_*)$ e uno in $\operatorname{Im}(i_*)$.

- $\operatorname{Ker}(r_*) \cap \operatorname{Im}(i_*) = \{0\}$. Sia $\sigma \in \operatorname{Ker}(r_*) \cap \operatorname{Im}(i_*)$: allora $r_*(\sigma) = 0$ ed esiste $\gamma \in H_i(T)$ tale che $\sigma = i_*(\gamma)$, ma quindi: $0 = r_*(\sigma) = r_*(i_*(\gamma)) = \gamma \Rightarrow \sigma = i_*(0) = 0$.
- Sia $\sigma \in H_i(X)$: osservo, che detta $\gamma = r_*(\sigma)$: $r_*(i_*(\gamma)) = \gamma = r_*(\sigma) \implies \sigma - i_*(\gamma) \in \operatorname{Ker}(r_*)$ e quindi $\sigma = i_*(\gamma) + (\sigma - i_*(\gamma))$ è somma di un elemento di $\operatorname{Im}(i_*)$ e uno di $\operatorname{Ker}(r_*)$.

Soluzione esercizio 1.3

Poichè $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}^r$ dove r è il numero di componenti connesse per archi di X, è facile vedere che:

- $n = 1$: $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$ ha 3 componenti connesse per archi, quindi $H_0(\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}) \simeq \mathbb{Z}^3$
- $n > 1$: $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2\}$ è connesso per archi, quindi $H_0(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2\}) \simeq \mathbb{Z}$

Osservo che $X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2\} = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1\} \cap \mathbb{R}^n \setminus \{x_2\}$: usiamo il toerema di Mayer-Vietous per calcolare i gruppi di omologia di X nel caso in cui x_1 e x_2 siano due punti distinti.

Sia $U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}$ per $j = 1, 2$, vale:

- U_j aperto e $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^n$ che è contrattile, quindi $H_i(U_1 \cup U_2) = H_i(\mathbb{R}^n) = 0$ $\forall i > 0$;
- sappiamo che S^{n-1} è un retratto per deformazione di U_j, in particolare S^{n-1} è omotopicamente equivalente a U_j e i due hanno la stessa omologia. Quindi $H_i(U_j) \simeq H_i(S^{n-1})$.

Dal teorema di Mayer-Vietous abbiamo una successione esatta:

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H_i(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H_i(U_1) \oplus H_i(U_2) \longrightarrow H_i(U_1 \cup U_2) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(S^{n-1}) \oplus H_i(S^{n-1}) \longrightarrow H_i(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \cdots$$

e per $i > 0$ diventa $0 \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(S^{n-1}) \oplus H_i(S^{n-1}) \longrightarrow 0$.

Quindi $H_i(X) \simeq H_i(S^{n-1}) \oplus H_i(S^{n-1}) \simeq \begin{cases} 0 & i \neq n-1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = n-1 \end{cases}$

Soluzione esercizio 1.4

Osserviamo per prima cosa che $H_0(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z}$ perchè il toro è connesso per archi.
Inoltre $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, quindi $H_0(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1 \times S^1)^{ab} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Siano U e V come nel testo. Osservo che $S^1 \times S^1 = (S^1 \times U) \cup (S^1 \times V)$, ricoprimento aperto: usiamo il toerema di Mayer-Vietous per calcolare i gruppi di omologia di $S^1 \times S^1$.

- S^1 è un retratto per deformazione di $S^1 \times U$ e a $S^1 \times V$, quindi in particolare S^1 è omotopicamente equivalente a $S^1 \times U$ e a $S^1 \times V$, ovvero $H_i(S^1 \times U) = H_i(S^1 \times V) = H_i(S^1)$;

- Inoltre $(S^1\times U)\cap(S^1\times V)=S^1\times(U\cap V)$ si retra per deformazione su due copie disgiunte di S^1, quindi $H_i((S^\times U)\cap(S^1\times V))=H_i(S^1\sqcup S^1)=H_i(S^1)\oplus H_i(S^1)$, dove l'ulitma uguaglianza segue dal fatto che l'immagine di funzione continue da un connesso è connessa (quindi $\sigma:\Delta_i\to A\sqcup B$, $\sigma:\Delta_i\to A$ o $\sigma:\Delta_i\to B$)

Dal teorema di Mayer-Vietous abbiamo una successione esatta:

$$\cdots\to H_i(S^1\times U)\oplus H_i(S^1\times V)\to H_i(S^1\times S^1)\to H_{i-1}((S^1\times U)\cap(S^1\times V))\to$$
$$\to H_{i-1}(S^1\times U)\oplus H_i(S^1\times V)\to H_{i-1}(S^1\times S^1)\to\cdots$$

$$\to H_i(S^1)\oplus H_i(S^1)\to H_i(S^1\times S^1)\to H_{i-1}(S^1)\oplus H_{i-1}(S^1)\to H_{i-1}(S^1)\oplus H_{i-1}(S^1)\to H_{i-1}(S^1\times S^1)\to\cdots$$

Ricordando $H_1(S^1)=H_0(S^1)=\mathbb{Z}$, $H_i(S^1)=0\ \forall i>1$, otteniamo:

- $i=2$: abbiamo

$$0\to H_2(S^1\times S^1)\xrightarrow{i}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{a}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{b}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{c}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{d}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{e}\mathbb{Z}\to 0$$

  quindi i iniettiva e $H_2(S^1\times S^1)\simeq\mathrm{Im}(i)=\mathrm{Ker}(a)$.
  Osservo che una mappa $f:\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ surgettiva ha come kernel $\mathbb{Z}$, infatti abbiamo $\frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathrm{Ker}f}\simeq\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ è un modulo libero, quindi $\mathrm{Ker}f\simeq\mathbb{Z}$.
  Ma allora: e surgettiva, quindi $\mathbb{Z}=\mathrm{Ker}(e)=\mathrm{Im}(d)$, da cui $\mathbb{Z}=\mathrm{Ker}(d)=\mathrm{Im}(c)$, quindi $\mathbb{Z}=\mathrm{Ker}(c)=\mathrm{Im}(b)\Rightarrow\mathbb{Z}=\mathrm{Ker}(b)=\mathrm{Im}(a)\implies\mathbb{Z}=\mathrm{Ker}(a)$.
  Quindi $H_2(S^1\times S^1)\simeq\mathrm{Ker}(a)\simeq\mathbb{Z}$.

- $i\geq 3$, vale $H_i(S^1\times S^1)\simeq 0$, infatti la succesione esatta diventa:

$$0\to H_i(S^1\times S^1)\to 0$$

Quindi: $H_i(S^1\times S^1)=\begin{cases}\mathbb{Z} & i=0\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & i=1\\ \mathbb{Z} & i=2\\ 0 & i>2\end{cases}$

Soluzione esercizio 1.5

Nelle notazioni dell'esercizio, consideriamo la sequenza di Mayer - Vietoris indicata: questa è indotta dalla successione esatta corta

$$0\longrightarrow S_\bullet(U\cap V)\xrightarrow{(\varphi_U,\varphi_V)}S_\bullet(U)\oplus S_\bullet(V)\xrightarrow{i_U-i_V}S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)\longrightarrow 0$$

con $\varphi_U:S_\bullet(U\cap V)\to S_\bullet(U)$ la mappa indotta dall'inclusione $U\cap V\hookrightarrow U$, e $i_U:S_\bullet(U)\hookrightarrow S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)$. Inoltre $(\varphi_U,\varphi_V)(\sigma)=(\varphi_U\sigma,\varphi_V\sigma)$ e $(i_U-i_V)(\sigma,\tau)=i_U(\sigma)-i_V(\tau)$.

Passando ai gruppi di omologia otteniamo una successione esatta lunga ed in particolare:

$$\begin{tikzcd}
H_1(U)\oplus H_1(V) \arrow[r] & H_1(S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)) \arrow[r, "\delta^{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\wr"] & H_0(U\cap V) \arrow[r, "\Delta"] & H_0(U)\oplus H_0(V) \arrow[r] & H_0(S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
& H_1(S^1) \arrow[ur, "\delta"] & & & H_0(S^1) &
\end{tikzcd}$$

- $\Delta([\sigma]) = ([\varphi_U(\sigma)], [\varphi_V(\sigma)])$;
- gli isomorfismi $H_j(S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)) \simeq H_j(S^1)$ sono indotti dall'inclusione $i : S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1) \hookrightarrow S_\bullet(S^1)$, quindi $\delta|_{H_1(S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1))} = \delta^{\mathcal{U}}$
- $\delta^{\mathcal{U}}([\sigma]) = [\gamma]$ così costruito: $\sigma \in Z_1(S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1))$, quindi esiste $(\alpha, \beta) \in S_1(U) \oplus S_1(V)$ tale che $\sigma = i_U(\alpha) - i_V(\beta)$. Ora $\bar{d}_1(\alpha, \beta) = (d_1^U(\alpha), d_1^V(\beta)) \in Z_0(S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V))$ e quindi esiste un unico $\gamma \in Z_0(S_\bullet(U \cap V))$ tale che $(\varphi_U(\gamma), \varphi_V(\gamma)) = (d_1^U(\alpha), d_1^V(\beta))$.

Osserviamo inoltre che U e V scelti sono connessi e contrattili, quindi $H_1(U) \oplus H_1(V) = 0$, e inoltre per quanto visto a lezione, $H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, $H_0(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}[P_+] \oplus \mathbb{Z}[P_-]$, $H_0(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, quindi otteniamo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{Z}[P_+] \oplus \mathbb{Z}[P_-] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_1(S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)) \arrow[r, "\delta^{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\wr"] & H_0(U \cap V) \arrow[r, "\Delta"] & H_0(U) \oplus H_0(V) \arrow[r] & H_0(S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
 & H_1(S^1) \arrow[ru, "\delta"] & & & H_0(S^1) &
\end{tikzcd}$$

a) Da quanto visto a lezione sappiamo che $\mathrm{Ker}\Delta \simeq \mathbb{Z}$.
Consideriamo $\sigma = [P_+ - P_-] \in H_0(U \cap V)$: $\sigma \neq 0$, perché P_+ e P_- sono in due componenti connesse diverse. Osserviamo che $\varphi_U[P_+ - P_-] = [P_+ - P_-] = [d_1^U(z^+)] = 0 \in H_0(U)$ e analogamente $\varphi_V[P_+ - P_-] = 0 \in H_0(V)$, quindi $\Delta(\sigma) = 0$.
Sia ora un qualsiasi $\tau = (n_+ P_+, n_- P_-) \in \mathrm{Ker}(\Delta) \iff \varphi_U(\tau) = 0, \varphi_V(\tau) = 0$.
Se $n_- = n_+ + n, n \in \mathbb{Z}$, allora $\varphi_U(\tau) = \varphi(n_+\sigma) + \varphi_U([nP_-]) = \varphi_U([nP_-]) = n[P_-] = 0 \Rightarrow n = 0$, perché $H_0(U) = \mathbb{Z}[P_-]$, cioè $\tau = n_+\sigma$. Quindi $\mathrm{Ker}(\Delta) =< [P_+ - P_-] >\simeq \mathbb{Z}$.

b) Vediamo che $\delta([z_+ - z_-]) = [P_+ - P_-]$: osserviamo che $\mathrm{Im}(z_+) \in U, \mathrm{Im}(z_-) \in V \Rightarrow z_+ - z_- \in S_\bullet^{\mathcal{U}}(S^1)$, quindi $\delta([z_+ - z_-]) = \delta^{\mathcal{U}}([z_+ - z_-])$.
Ora $z_+ - z_- = i_U(z_+) - i_V(z_-)$ e $\bar{d}_1(z_+, z_-) = (P_+ - P_-, P_+ - P_-) = (\varphi_U, \varphi_V)(P_+ - P_-)$, da cui la tesi.

c) Considero $G : \Delta^2 \to S^1$, data da $G = (z_+ * (-z_-)) \circ \pi$, dove π è la proiezione del triangolo sul lato inferiore, e $*$ è l'operazione di giunzione di due cammini. Abbiamo che G ristretta ai lati è rispettivamente pari a z_+, z_- e $z_+ * (-z_-) = z$, e quindi $d_2 G = z_+ + (-z_-) - z = z_+ - z_- - z$, da cui $[z] = [z_+ - z_-]$.

d) Abbiamo che
$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\delta} H_0(U \cap V) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$
e $\mathrm{Im}\delta = \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{Z}[\sigma]$ per esattezza della successione, quindi
$$H_1(S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{Z}[\sigma] \quad \text{ e } \sigma = \delta([z_+ - z_-]) = \delta([z]).$$
Poichè δ è un isomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli, necessariamente deve mandare il generatore di $H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ nel generatore di $\mathrm{Im}(\delta)$, quindi $[z]$ genera $H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

ALGEBRAIC TOPOLOGY
Homework 2

1. Let P be a point of the topological space X. Show that the natural maps $H_i(X) \to H_i(X, \{P\})$ induce isomorphisms $\tilde{H}_i(X) \cong H_i(X, \{P\})$ for all $i \geq 0$.

2. Let X be a CW complex, and $Y \subset X$ a subcomplex (i.e. a CW complex which is a union of cells of X). Verify that

$$H_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}\langle\Gamma\rangle & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

where $\mathbf{Z}\langle\Gamma\rangle$ is the free abelian group generated by the set Γ of n-cells in $X \setminus Y$.

3. *a*) With notation as in the previous exercise, construct long exact homology sequences

$$\cdots \to H_i(X^n \cup Y, Y) \to H_i(X, Y) \to H_i(X, X^n \cup Y) \to H_{i-1}(X^n \cup Y, Y) \to \cdots$$

and

$$\cdots \to H_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \to H_i(X^p, X^{n-1} \cup Y) \to H_i(X^p, X^n \cup Y) \to$$
$$\to H_{i-1}(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \to \cdots$$

for $p \geq n$.

b) Show that $H_i(X, X^n \cup Y) = 0$ for $i \geq n$.

c) Conclude that the map $H_i(X^n \cup Y, Y) \to H_i(X, Y)$ is an isomorphism for $i > n$.

4. *a*) Using the groups $H_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y)$ define a complex $C_\bullet^{CW}(X, Y)$ by analogy with the complex $C_\bullet^{CW}(X)$ defined in class and construct isomorphisms

$$H_i(C_\bullet^{CW}(X, Y)) \xrightarrow{\sim} H_i(X, Y)$$

for all i.

b) Let X/Y be the quotient space obtained from X by identifying all points of Y with a point $P \in Y$. Using *a*) and Exercises 1, 2 construct isomorphisms

$$H_i(X, Y) \xrightarrow{\sim} H_i(X/Y, \{P\}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(X).$$

[Do NOT use Prop. 2.22 in Hatcher's book which we did not prove in class.]

5. A connected finite graph X is a *tree* if for every vertex $P \in X$ the space $X \setminus \{P\}$ is disconnected. It is easy to show by induction that every connected finite graph X contains a tree T as a CW subcomplex with the same set of vertices ('spanning tree'). Note that T is contractible.

a) Show using Exercise 4 that X/T, which is topologically a bunch of circles meeting at a point, satisfies $H_i(X) \cong H_i(X/T)$ for all i.

b) Compute the homology groups of the CW complex X/T using the complex $C_\bullet^{CW}(X/T)$.

c) Using *a*) and *b*) above compute the homology groups of the finite graph X (this method is different from the one seen in class).

Soluzione esercizio 2.1

Sia $\{P\} \overset{i}{\hookrightarrow} X \Rightarrow S_\bullet(\{P\}) \overset{i_*}{\hookrightarrow} S_\bullet(X) \twoheadrightarrow S_\bullet(X,\{P\})$ da cui ottengo la relative homology sequence:

$$\cdots \longrightarrow H_i(\{P\}) \xrightarrow{i_*} H_i(X) \longrightarrow H_i(X,\{P\}) \longrightarrow H_{i-1}(\{P\}) \longrightarrow \cdots$$

- Per $i > 1$, si ha: $H_{i-1}(\{P\}) = H_i(\{P\}) = 0$ e $\tilde{H}_i(X) = H_i(X)$, quindi la successione esatta diventa
$$0 \longrightarrow \tilde{H}_i(X) \longrightarrow H_i(X,\{P\}) \longrightarrow 0$$
ovvero $H_i(X,\{P\}) \simeq \tilde{H}_i(X)\ \forall i > 1$.

- Considero allora la parte finale della successione esatta:
$$0 \longrightarrow\ H_1(X) \longrightarrow H_1(X,\{P\}) \xrightarrow{\delta} H_0(\{P\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow H_=(X,\{P\}) \longrightarrow 0 \quad (*)$$
  - la mappa $H_0(\{P\}) \overset{i_*}{\to} H_0(X)$ è iniettiva per l'esercizio HW1.2 (un punto di X è sempre un retratto di X)
  - Dall'esattezza della successione $(*)$ trovo che $\mathrm{Im}(\delta) = \ker(i_*) = 0$, cioè $\delta = 0$.

  Ottengo: $0 \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_1(X,\{P\}) \xrightarrow{0} H_0(\{P\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow H_0(X,\{P\}) \longrightarrow 0$, da cui trovo che:

  - $H_1(X,\{P\}) \simeq H_1(X) \simeq \tilde{H}_1(X)$;
  - $H_0(X,\{P\}) \simeq \mathrm{coker}(i_*) \simeq H_0(X)/H_0(\{P\})$: inoltre per definizione $H_0(X) \simeq H_0(\{P\}) \oplus \tilde{H}_0(X)$,
  $$H_0(X,\{P\}) \simeq H_0(X)/H_0(\{P\}) \simeq (H_0(\{P\}) \oplus \tilde{H}_0(X))/H_0(\{P\}) \overset{(*)}{\simeq} \tilde{H}_0(X))$$
  dove l'isomorfismo in $(*)$ è dato dal primo teorema di omomorfismo sulla mappa $\tilde{H}_0(X) \oplus H_0(\{P\}) \twoheadrightarrow \tilde{H}_0(X)$.

Soluzione esercizio 2.2

Considero il CW complex $\tilde{X}$ tale che

$$\tilde{X}^i = X^i\ \forall i < n \ \text{ e } \ \tilde{X}^n = \left(\tilde{X}^{n-1} \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in \Gamma} E^n_\alpha \right) \Big/ \sim$$

dove Γ è l'insieme delle n-celle di $X \setminus Y$ ($\tilde{X}$ ha le stesse i-celle di X per $i < n$ e ha come n celle le n-celle di $X \setminus Y$). Allora $X^n \cup Y = \tilde{X}^n \cup Y$ e $X^{n-1} \cup Y = \tilde{X}^{n-1} \cup Y$.

Siano $\forall \alpha \in \Gamma$ $\phi^n_\alpha : E^n_\alpha \to \tilde{X}^n$ le mappe caratteristiche: osserviamo che ϕ^n_α ristretta a $\mathrm{int}(E^n_\alpha)$ è omeomorfismo sull'immagine. Consideriamo $\forall \alpha$, $D^n_\alpha \subset \mathrm{int}(E^n_\alpha)$ palla chiusa centrata in 0, $D^n = \sqcup_\alpha \phi^n_\alpha(D^n_\alpha)$ e $A = \{\phi^n_\alpha(0) | \alpha \in \Gamma\}$. Vale:

$$H_i(D^n, D^n \setminus A) \overset{\text{exc.}}{\simeq} H_i(\tilde{X}^n \cup Y, \tilde{X}^n \cup Y \setminus A)$$

dove uso excision con $\tilde{X}^n \cup Y \setminus D^n \subset \tilde{X}^n \cup Y \setminus A$ (e osservo che $\tilde{X}^n \cup Y \setminus D^n \subset \mathrm{int}(\tilde{X}^n \cup Y \setminus A)$). Inoltre $A \cap Y = \emptyset$ e $X^n \setminus A$ è un retratto per deformazione di $\tilde{X}^{n-1}$, quindi analogamente alla dimostrazione vista a lezione si ha:

$$\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} H_i(D^n_\alpha, D^n_\alpha \setminus \{0\}) \overset{(\phi^n_\alpha)}{\simeq} H_i(D^n, D^n \setminus A) \overset{\text{exc.}}{\simeq} H_i(\tilde{X}^n \cup Y, \tilde{X}^n \cup Y \setminus A) \overset{\text{def. ret.}}{\simeq} H_i(\tilde{X}^n \cup Y, \tilde{X}^{n-1} \cup Y)$$

Ora come abbiamo già calcolato a lezione usando excision, il fatto che S^{n-1} è un retratto per deformazione di $E^n \setminus \{0\}$, e conoscendo l'omologia di S^{n-1} troviamo che

$$H_i(D^n_\alpha, D^n_\alpha \setminus \{0\}) \simeq H_i(E^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} 0 & i \neq n \\ \mathbb{Z} & i = n \end{cases}$$

da cui

$$H_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) = H_i(\tilde{X}^n \cup Y, \tilde{X}^{n-1} \cup Y) \simeq \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} H_i(E^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ \mathbb{Z}[\Gamma] & i = n \end{cases}$$

Soluzione esercizio 2.3

a) Osserviamo che $Y \subset X^n \cup Y \subset X$, quindi $S_i(Y) \subset S_i(X^n \cup Y) \subset S_i(X)$ $\forall i$. Quindi

$$S_i(X^n \cup Y, Y) = S_i(X^n \cup Y)/S_i(Y) \subset S_i(X)/S_i(Y) = S_i(X, Y) \text{ e } 0 \to S_i(X^n \cup Y, Y) \xrightarrow{j} S_i(X, Y)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} S_i(X, X^n \cup Y) &= S_i(X)/S_i(X^n \cup Y) \simeq S_i(X)/S_i(Y) \Big/ S_i(X^n \cup Y)/S_i(Y) \\ &= \mathrm{coker}(S_i(X^n \cup Y, Y) \xrightarrow{j} S_i(X, Y)) \end{aligned}$$

dove l'isomorfismo è dato dal terzo teorema di omomorfismo. Poiché i risultati ottenuti valgono $\forall i$, otteniamo una successione esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow S_\bullet(X^n \cup Y, Y) \longrightarrow S_\bullet(X, Y) \longrightarrow S_\bullet(X, X^n \cup Y) \longrightarrow 0$$

da cui troviamo la prima successione esatta lunga di omologia richiesta.

Con ragionamenti analoghi su $X^{n-1} \cup Y \subset X^n \cup Y \subset X^p \cup Y$, otteniamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow S_\bullet(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \longrightarrow S_\bullet(X^p \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \longrightarrow S_\bullet(X^p \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow 0$$

da cui troviamo la seconda successione esatta lunga di omologia richiesta

b) Per prima cosa osserviamo che $[\alpha] \in H_i(X, X^n \cup Y) \implies [\alpha] \in H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y)$ per qualche $p \geq n$.
Infatti $\alpha = [\sigma]$ in $Z_i(S_i(X)/S_i(X^n \cup Y))$ dove $\sigma : \Delta_i \to X$, quindi per compattezza di Δ_i, $\mathrm{Im}(\sigma) \subset C$ dove C è un compatto di X. Poichè X è un CW-complex e $C \subset X$ è compatto, C interseca un numero finito di celle, quindi esisterà p tale che $C \subset X^p \cup Y$ e $X^n \cup Y \subset X^p \cup Y$, ovvero $[\sigma] \in Z_i(S_i(X^p \cup Y)/S_i(X^n \cup Y))$ (le mappe di bordo di $S_\bullet(X^p \cup Y, X^n \cup Y)$ sono restrizione delle mappe di bordo di $S_\bullet(X, X^n \cup Y)) \Rightarrow [\alpha] \in H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y)$.

Mi basta quindi dimostrare che $\forall p \geq n \geq i$, $H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y) = 0$.

Osserviamo che la tesi è ovvia se $p = n$ (l'omologia relativa di due spazi uguali è 0).
Consideriamo allora $p > n$: vale $p \geq n+1 > i$, quindi dalla seconda successione esatta lunga di omologia troviamo,

$$H_i(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow H_i(X^p \cup Y, X^{n+1} \cup Y) \longrightarrow H_{i-1}(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y)$$

$$0 \longrightarrow H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow H_i(X^p \cup Y, X^{n+1} \cup Y) \longrightarrow 0$$

poiché per l'esercizio 2 $H_i(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) = 0$ $\forall i < n+1$. Quindi

$$\forall p \geq n+1 \ H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y) \simeq H_i(X^p \cup Y, X^{n+1} \cup Y)$$

Ma quindi poiché l'isomorfismo vale $\forall n \leq p-1$

$$H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y) \simeq \cdots \simeq H_i(X^p \cup Y, X^{p-1} \cup Y) \simeq 0$$

perché $i < n+1 \leq p$.

c) Sia $i < n$ dalla prima successione esatta lunga di omologia troviamo:

$$H_{i+1}(X, X^n \cup Y) \longrightarrow H_i(X^n \cup Y, Y) \longrightarrow H_i(X, Y) \longrightarrow H_i(X, X^n \cup Y)$$

$$0 \longrightarrow H_i(X^n \cup Y, Y) \longrightarrow H_i(X, Y) \longrightarrow 0$$

per il punto b), perché $i, i+1 \leq n$. Ma quindi $H_i(X^n \cup Y, Y) \longrightarrow H_i(X, Y)$ è un isomorfismo.

Soluzione esercizio 2.4

Indichiamo con $C_n^{\mathrm{CW}}(X,Y) = H_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y)$ $\forall n > 0$ e $C_0^{\mathrm{CW}}(X,Y) = H_0(X^0 \cup Y, Y)$.

a) Dall'inclusione $Y \subset X^{n-1} \cup Y \subset X^n \cup Y$ ricaviamo come dall'esercizio 3 la successione esatta

$$0 \to H_n(X^{n-1} \cup Y, Y) \to H_n(X^n \cup Y, Y) \overset{j_n^{(n)}}{\to} C_n^{\mathrm{CW}}(X,Y) \overset{\delta_n^{(n)}}{\to} H_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, Y) \to H_{n-1}(X^n \cup Y, Y) \to 0$$

dove gli zeri all'iniziale e alla fine seguono dal fatto che $H_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) = 0$ $\forall i \neq n$.

Oss. $H_n(X^{n-1} \cup Y, Y) = 0$

Infatti, dato $k > n-1$ sia $i : Y^k \hookrightarrow Y \hookrightarrow X^{n-1} \cup Y$: i definisce una mappa $(Y^k, Y^k) \to (X^{n-1} \cup Y)$ $(i(Y^k) \subset Y)$. Quindi abbiamo una mappa fra le successioni esatte lunghe

$$\begin{tikzcd}
H_n(Y^k) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\wr"] & H_n(Y^k) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\wr"] & H_n(Y^k, Y^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(Y^k) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\wr"] & H_{n-1}(Y^k) \arrow[d, "i_*"', "\wr"] \\
H_n(Y) \arrow[r] & H_n(X^n \cup Y) \arrow[r] & H_n(X^{n-1} \cup Y, Y) \arrow[r] & H_{n-1}(Y) \arrow[r] & H_{n-1}(X^n \cup Y)
\end{tikzcd}$$

dove le tre mappe verticali indotte dall'inclusione sono isomorfismi perché $k > n, n-1$. Ma quindi per il lemma dei cinque anche $0 = H_n(Y^k, Y^k) \to H_n(X^{n-1} \cup Y, Y)$ è un isomorfismo, da cui la tesi.

Definiamo allora $d_1^{\mathrm{CW}} = \delta_1^1 : H_1(X^1 \cup Y, X^0 \cup Y) \to H_0(X^0 \cup Y, Y)$ e

$$d_n^{\mathrm{CW}} : H_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \overset{\delta_n^{(n)}}{\to} H_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, Y) \overset{j_{n-1}^{(n-1)}}{\to} H_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, X^{n-2} \cup Y)$$

La successione $(C_n^{\mathrm{CW}}(X,Y), d_n^{\mathrm{CW}})$ così definita è in effetti un complesso: infatti $\delta_n^{(n)} \circ j_n^{(n)} = 0$, quindi $d_n^{\mathrm{CW}} \circ d_{n+1}^{\mathrm{CW}} = j_{n-1}^{(n-1)} \circ \delta_n^{(n)} \circ j_n^{(n)} \circ \delta_{n+1}^{(n+1)} = 0$.
Dimostro che $H_i(C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X,Y)) \simeq H_i(X,Y)$. In modo analogo a quanto fatto a lezione per $C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X)$, costruiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1} \cup Y, Y) & & \\
& H_n(X^n \cup Y, Y) \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "j_n^{(n)}"] & & & \\
H_{n+1}(X^{n+1} \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \arrow[ur, "\delta_{n+1}^{(n+1)}"] \arrow[rr, "d_{n+1}^{\mathrm{CW}}"] & & H_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \arrow[rr, "d_n^{\mathrm{CW}}"] \arrow[dr, "\delta_n^{(n)}"'] & & H_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, X^{n-2} \cup Y) \\
& & & H_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, Y) \arrow[ur, "j_{n-1}^{(n-1)}"'] & \\
& & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Anche in questo caso: $j_{n-1}^{(n-1)}$ è iniettiva, quindi $\ker(d_n^{\mathrm{CW}}) = \ker(\delta_n^{(n)}) \simeq H_n(X^n \cup Y, Y)$, e analogamente poichè anche $j_n^{(n)}$ è iniettiva, $\mathrm{Im}(d_{n+1}^{\mathrm{CW}}) \simeq \mathrm{Im}(\delta_{n+1}^{(n+1)})$, quindi dal diagramma ottengo una mappa

$$H_i^{\mathrm{CW}}(X,Y) := H_i(C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X,Y)) = \frac{\ker\left(d_n^{\mathrm{CW}}\right)}{\mathrm{Im}\left(d_{n+1}^{\mathrm{CW}}\right)} \xrightarrow{\gamma} H_n(X^{n+1} \cup Y, Y) \overset{\text{es 3.}}{\simeq} H_n(X,Y)$$

e questa è un isomorfismo perché viene da $C_{n+1}^{\mathrm{CW}}(X,Y) \overset{\delta_{n+1}^{(n+1)}}{\to} H_n(X^n \cup Y, Y) \overset{\gamma}{\to} H_n(X^{n+1} \cup Y, Y) \to 0$ successione esatta.

b) Osservo che X/Y è un CW-complex dove $(X/Y)^n = X^n/Y^n$ dove le mappe di incollamento e le mappe caratteristiche sono date rispettivamente da

$$\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1} \twoheadrightarrow X^{n-1}/Y^{n-1} \quad \psi_\alpha^n : E_\alpha^n \overset{\Phi_\alpha^n}{\to} X^n \twoheadrightarrow X^n/Y^n$$

per ogni $\alpha \in \Gamma$, dove Γ è l'insieme delle n-celle di $X \setminus Y$, dove abbiamo indicato con φ_α e Φ_α le mappe di incollamento e mappe caratteristiche di X. Inoltre anche $\{P\}$ è un CW-complex fatto da un'unica 0-cella (cioè P stesso).

Quindi per il punto a), vale $H_i(X/Y, \{P\}) \simeq H_i^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\})$.

Consideriamo il complesso $C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\})$, vale:

$$C_i^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\}) = H_n((X/Y)^n, (X/Y)^{n-1}) \overset{(\psi_\alpha^n)}{\simeq} \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} H_n(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1})$$

Inoltre sappiamo dall'esercizio 2, che $C_n^{\mathrm{CW}}(X, Y) \overset{(\phi_\alpha^n)}{\simeq} \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} H_n(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1})$

Sia $p : (X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \to ((X/Y)^n, (X/Y)^{n-1})$ data da $Xp : X^n \cup Y \twoheadrightarrow X^n \cup Y/Y \simeq X^n/Y^n$: p induce una mappa $C_n^{\mathrm{CW}}(X, Y) \overset{p_*^{(n)}}{\to} C_n^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\})$. Ora, poichè $\psi_\alpha^n = p \circ \Phi_\alpha^n$, il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} C_n^{\mathrm{CW}}(X,Y) \arrow[r, "(\Phi_\alpha^n)", "\sim"'] \arrow[d, "p_*^{(n)}"'] & \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} H_n(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \\ C_n^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\}) \arrow[ur, "\sim", "(\psi_\alpha^n)"'] & \end{tikzcd}$$

da cui trovo che $p_*^{(n)}$ è un isomorfismo.

Inoltre la mappa induce anche una mappa fra le terne $(Y, X^{n-1} \cup Y, X^n \cup Y) \overset{p}{\to} (\{P\}, X^{n-1}/Y^{n-1}, X^n/Y^n)$, tale che $p(Y) \subset \{P\}, p(X^{n-1} \cup Y) \subset X^{n-1}/Y^{n-1}$, ed in modo analogo a quanto fatto nell'osservazione al punto a), possiamo dimostrare che induce una mappa fra i complessi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(X^n \cup Y, Y) \arrow[r] \arrow[d] & C_n^{\mathrm{CW}}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr", "p_*^{(n)}"'] & H_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, Y) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(X^n \cup Y, Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_n(X^n/Y^n, \{P\}) \arrow[r] & C_n^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\}) \arrow[r] & H_{n-1}(X^{n-1}/Y^{n-1}, \{P\}) \arrow[r] & H_{n-1}(X^n/Y^n, \{P\}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Poiché posso costruire $p_*^{(n)}$ per ogni n, per costruzione dei complessi $C_\bullet^{\mathrm{CW}}(-,-)$, otteniamo una mappa di complessi: $p : C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X, Y) \to C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\})$, dove le mappe verticali sono tutti isomorfismi.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, X^{n-2} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X^{n+1}/Y^{n+1}, X^n/Y^n) \arrow[r] & H_n(X^n/Y^n, X^{n-1}/Y^{n-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(X^{n-1}/Y^{n-1}, X^{n-2}/Y^{n-2}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Quindi i due complessi hanno gli stessi gruppi di omologia, ed ottengo.

$$H_i(X, Y) \simeq H_i^{\mathrm{CW}}(X, Y) = H_i(C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X, Y)) \simeq H_i(C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X/Y, \{P\})) \simeq H_i(X/Y, \{P\} \overset{\text{es.1}}{\simeq} \tilde{H}_i(X/Y)$$

Soluzione esercizio 2.5

a) Vale $H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_0(X/T)$ perché X e X/T sono connessi.
Sia $i > 0$ dall'esercizio 4 abbiamo:

$$H_i(X/T) = \tilde{H}_i(X/T) \simeq H_i(X,T)$$

Adesso osserviamo che T è contraibile, quindi $H_i(T) \simeq 0 \ \forall i > 0$, quindi dalle relative homology sequence di (X,T) otteniamo

$$H_i(X) \simeq H_i(X,T) \simeq H_i(X/T).$$

b) Consideriamo il complesso $C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X/T)$: osserviamo che X/T ha solo 0-celle e 1-celle, quindi $H_i((X/T)^i, (X/T)^{i-1}) = 0 \ \forall i > 1$, quindi il complesso è

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1((X/T)^1, (X/T)^0) \xrightarrow{d_1^{\mathrm{CW}}} H_0((X/T)^0)$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{d_1^{\mathrm{CW}}} \mathbb{Z}$$

dove $(X/T)^0$ è l'unico vertice di X/T, quindi $H_0((X/T)^0) \simeq 0$, e per quanto visto a lezione $H_1(X^1/T^1, X^0/T^0) = \mathbb{Z}[\Gamma]$ con Γ l'insieme delle 1-celle di X/T, che sono le 1-celle di $X \setminus T$. Osserviamo inoltre che poichè X/T connesso,

$$\mathbb{Z} \simeq H_0(X/T) \simeq H_0^{\mathrm{CW}}(X/T) \simeq \frac{H_0((X/T)^0)}{\mathrm{Im}(d_1^{\mathrm{CW}})} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{Im}(d_1^{\mathrm{CW}})} \Rightarrow \mathrm{Im}(d_1^{\mathrm{CW}}) = 0, \text{ ovvero } d_1^{\mathrm{CW}} = 0$$

Quindi, detto v il numero di vertici e e il numero di archi di X, $X \setminus T$ ha esattamente $e - v + 1$ 1-celle (ogni albero con n vertici ha $n-1$ lati), cioè $|\Gamma| = e - v + 1$. Quindi

$$H_i(X/T) \simeq H_i^{\mathrm{CW}}(X/T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ H_1(X^1, X^0) \simeq \mathbb{Z}^{e-v+1} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

c) Otteniamo

$$H_i(X) \overset{\text{pt.a)}}{\simeq} H_i(X/T) \overset{\text{pt.b)}}{\simeq} \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ H_1(X^1, X^0) \simeq \mathbb{Z}^{e-v+1} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

ALGEBRAIC TOPOLOGY
Homework 3

1. Let X be a topological space such that the homology groups $H_i(X)$ are finitely generated free abelian groups for all i.

Show that the Eilenberg–Zilber map

$$S_\bullet(X \times X) \to S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)$$

induces isomorphisms

$$\alpha_n : \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \mathbf{Z}) \otimes H^j(X, \mathbf{Z}) \cong H^n(X \times X, \mathbf{Z})$$

for all $n \geq 0$. (Special case of the Künneth formula.)

2. Consider elements $x_i \otimes x_j \in H^i(X, \mathbf{Z}) \otimes H^j(X, \mathbf{Z})$ and $x_p \otimes x_q \in H^p(X, \mathbf{Z}) \otimes H^q(X, \mathbf{Z})$. With notation as in the previous exercise, verify that

$$\alpha_{i+j}(x_i \otimes x_j) \cup \alpha_{p+q}(x_p \otimes x_q) = (-1)^{jp} \alpha_{i+j+p+q}((x_i \cup x_p) \otimes (x_j \cup x_q)).$$

3. Using the previous two exercises, compute the cohomology ring $H^*(S^1 \times S^1)$.

[*Bonus question:* Can you generalize your answer to $(S^1)^{\times n}$ (n-th direct power)?]

4. *a*) Let $\pi : Y \to X$ be a covering space of X, where both X and Y are connected n-dimensional manifolds. Show that if X is orientable, then Y is also orientable. Moreover, we may find orientations in such a way that $\mu_{\pi(y)} = \mu_y$ for local orientations at every point $y \in Y$.

b) Using the covering space $S^n \to \mathbf{RP}^n$, deduce that $\mathbf{RP}^n$ is orientable if and only if n is odd.

5. Show that if X is an n-dimensional *noncompact* orientable manifold, then $H_n(X) = 0$.

Soluzione esercizio 3.1

Abbiamo visto a lezione che, detta $\bar{\text{EZ}} : S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \to S_\bullet(X \times X)$ la mappa ottenuta estendendo EZ_0^{-1}, la composizione $\bar{EZ} \circ EZ$ è chain homotic equivalent all'identità, quindi la mappa indotta in coomologia è l'identità. Cioè

$$\text{EZ}^* : H^n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \longrightarrow H^n(X \times X)$$

è un isomorfismo.

Consideriamo adesso $\bigoplus_{i=1}^n H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)$: per una proposizione vista, poiché gli $H_i(X)$ sono gruppi liberi, vale $H^i(X) \simeq \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z})$.

- Consideriamo la mappa $\Phi : \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z}) \otimes \text{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \to \text{Hom}(H_i(X) \otimes H_{n-1}(X), \mathbb{Z})$ data da $\Phi(\alpha \otimes \beta) = \widehat{\alpha \otimes \beta}$ tale che $\widehat{\alpha \otimes \beta}(a \otimes b) = \alpha(a)\beta(b)$. Osserviamo che poiché $H_i(X) \simeq \mathbb{Z}^{n_i}$ fin. gen. per ogni i, Φ è un isomorfismo, infatti
  - $\text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z}) \otimes \text{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n_i} \otimes \mathbb{Z}_{n_{n-i}} \simeq \text{Hom}(H_i(X) \otimes H_{n-1}(X), \mathbb{Z})$
  - Φ è iniettiva: $\widehat{\alpha \otimes \beta} = 0 \implies \alpha(1)\beta(1) = 0$, quindi $\alpha(1) = 0$ o $\beta(1) = 0$, ovvero una delle due mappe è nulla, ma quindi anche $a \otimes b$ lo è.

  Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{i=1}^n H^i(X) \otimes H^{n-i}(X) &\simeq \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z}) \otimes \text{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(H_i(X) \otimes H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \\
&\simeq \text{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n H_i(X) \otimes H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\right) \\
&\overset{(*)}{\simeq} \text{Hom}(H_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)), \mathbb{Z}) \simeq H^n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))
\end{aligned}$$

  a patto di dimostrare (*)

- Dimostro $(*)$: $\bigoplus_{i=1}^n H_i(X) \otimes H_{n-i}(X) \simeq H_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))$.

Possiamo vedere $Z_\bullet(X)$ e $B_\bullet(X)$ come restrizione del complesso $S_\bullet(X)$, in cui le mappe di bordo indotte sono tutte nulle: allora $S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X)$ e $S_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X)$ sono complessi con mappe di bordo $d \otimes \text{id}$.

Dalla successione esatta corta $0 \longrightarrow Z_i(X) \xrightarrow{i} S_i(X) \xrightarrow{d} B_{i-1}(X) \longrightarrow 0$ otteniamo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_{n+1} \arrow[r, "\text{id}\otimes i"] \arrow[d, "d\otimes\text{id}"] & (S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))_{n+1} \arrow[r, "\text{id}\otimes d"] \arrow[d, "\delta"] & (S_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X))_n \arrow[r] \arrow[d, "d\otimes\text{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n \arrow[r, "\text{id}\otimes i"] \arrow[d, "d\otimes\text{id}"] & (S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))_n \arrow[r, "\text{id}\otimes d"] \arrow[d, "\delta"] & (S_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X))_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d\otimes\text{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_{n-1} \arrow[r, "\text{id}\otimes i"] \arrow[d, "d\otimes\text{id}"] & (S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))_{n-1} \arrow[r, "\text{id}\otimes d"] \arrow[d, "\delta"] & (S_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X))_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "d\otimes\text{id}"] & 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

dove le righe sono esatte perché ottenute tensorizzando per $S_{n-i}(X)$ (piatto perchè libero) e poi facendo la somma diretta di un numero finito di successioni esatte corte.
È semplice verificare che i quadrati sono tutti commutativi: ad esempio per quello in alto a sinistra vale $a \in S_i(X)$, $b \in Z_{n-i+1}(X)$,

$$\delta(\mathrm{id} \otimes i(a \otimes b)) = \delta(a \otimes b) = d(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes d(b) = d(a) \otimes b = \mathrm{id} \otimes i(d \otimes \mathrm{id}(a \otimes b))$$

Quindi abbiamo ottenuto una successione esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X) \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

Analogamente, detto $H_\bullet(X)$ il complesso fatto dagli $\{H_i(X)\}$ e con mappe di bordo tutte nulle, abbiamo $0 \longrightarrow B_\bullet(X) \xrightarrow{i} Z_\bullet(X) \xrightarrow{p} H_\bullet(X) \longrightarrow 0$ e in modo analogo a prima otteniamo:

$$0 \longrightarrow H_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes i} H_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes p} H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(X) \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

Osserviamo adesso che $H_n(S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X)) = (H_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n$: infatti, usando il fato che nei moduli liberi un $a \otimes b = 0 \iff a = 0$ o $b = 0$ troviamo,

- $\ker((\mathrm{id} \otimes d)_n) = (Z_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n$
- $\mathrm{Im}((\mathrm{id} \otimes d)_n) = (B_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n$
- e otteniamo:

$$\begin{aligned} H_n(S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X)) &\simeq (Z_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n \Big/ (B_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^n Z_i(X) \otimes Z_{n-i}(X) \Big/ B_i(X) \otimes Z_{n-i}(X) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^n H_i(X) \otimes Z_{n-1}(X) \simeq (H_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n \end{aligned}$$

Quindi applicando lo zig zag lemma a 1.1 troviamo:

$$\overset{\beta_{n+1}}{\to} (H_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X))_{n+1} \overset{\alpha}{\to} (H_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n \to H_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \overset{\beta_n}{\to} (H_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X))_n$$

Vediamo che la mappa $\beta_n = 0$: infatti dato $[a \otimes b] \in H_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) : d(a) \otimes b + (-1)^p a \otimes d(b) = 0 \implies a \otimes d(b) = \pm d(a) \otimes b$, quindi

$$\beta([a \otimes b]) = [\mathrm{id} \otimes d(a \otimes b)] = [a \otimes d(b)] = [\pm d(a) \otimes b] = [0]$$

Inoltra la mappa α è tale che $[a] \otimes d(c) \in (H_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X))_{n+1}$, $\alpha([a] \otimes d(c)) = [(-1)^i a] \otimes d(c) = [a] \otimes d(c) = \mathrm{id} \otimes i(a \otimes d(c))$. Quindi abbiamo:

$$0 \to (H_\bullet(X) \otimes B_\bullet(X))_{n+1} \overset{\mathrm{id}\otimes i}{\to} (H_\bullet(X) \otimes Z_\bullet(X))_n \to H_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \to 0$$

Cioè

$$H_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \simeq \mathrm{coker}(\mathrm{id} \otimes i) \simeq (H_\bullet(X) \otimes H_c(X))_n \simeq \bigoplus_{i=1}^n H_i(X) \otimes H_{n-1}(X)$$

Abbiamo ottenuto:

$$\bigoplus_{i=1}^n H^i(X) \otimes H^{n-i}(X) \simeq H^n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \longrightarrow H^n(X \times X)$$

Soluzione esercizio 3.2

Definiamo alcune mappe:

- $\tau : S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \to S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)$ tale che $\tau(x_i \otimes x_j \otimes x_p \otimes x_q) = (-1)^{jp} x_i \otimes x_p \otimes x_j \otimes x_q$.
- $\mathrm{EZ} \otimes \mathrm{EZ} : S_\bullet(X \times X) \otimes S_\bullet(X \times X) \to S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)$ tale che $(\mathrm{EZ} \otimes \mathrm{EZ})_{n+m}(\sigma_n, \tau_m) = \mathrm{EZ}_n(\sigma_n) \otimes \mathrm{EZ}_m(\tau_m) \in (S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))_n \otimes (S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))_m$.
- analogamente $\mathrm{EZ}\Delta \otimes \mathrm{EZ}\Delta : S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \to S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)$

Vediamo che

$$(-1)^{jp}\alpha_{i+j+p+q}((x_i \smile x_p) \otimes (x_j \smile x_q)) = (\tau \circ ((\mathrm{EZ}\Delta \otimes \mathrm{EZ}\Delta) \circ \mathrm{EZ})^*(x_i \otimes x_j \otimes x_p \otimes x_q) \qquad (2.1)$$

$$\alpha_{i+j}(x_i \otimes x_j) \smile \alpha_{p+q}(x_p \otimes x_q) = ((\mathrm{EZ} \otimes \mathrm{EZ}) \circ (\mathrm{EZ}_{X \times X}\Delta_{X \times X}))^*(x_i \otimes x_j \otimes x_p \otimes x_q) \qquad (2.2)$$

Inoltre in grado 0 $(\tau \circ ((\mathrm{EZ}\Delta \otimes \mathrm{EZ}\Delta) \circ \mathrm{EZ})(P,Q) = \tau(P \otimes P \otimes Q \otimes Q) = P \otimes Q \otimes P \otimes Q$ e $((\mathrm{EZ} \otimes \mathrm{EZ}) \circ (\mathrm{EZ}_{X \times X}\Delta_{X \times X}))(P,Q) = (\mathrm{EZ} \otimes \mathrm{EZ})((P,Q) \otimes (P,Q)) = P \otimes Q \otimes P \otimes Q$: quindi sono due morfismo funtoriali $S_\bullet(X \times X) \to S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)$ che coincidono in grado 0, quindi sono chain homotipic equivalent, ovvero induco le stesse mappe. Da questo segue che 2.1 e 2.2 sono uguali, ovvero la tesi.

Soluzione esercizio 3.3

Ricordo che $H^1(S^1) \simeq H^0(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ e $H^i(S^1) = 0 \ \forall i > 1$: verifico che

$$H^*(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z}[x,y] \Big/ (x^2, y^2, yx = -xy).$$

Sia z un generatore di $H^1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, $x = \alpha_1(z \otimes 1)$ e $y = \alpha_1(1 \otimes z)$. Dall'es. 1 sappiamo che

- $H^0(S^1 \times S^1) \simeq H^0(S^1) \otimes H^0(S^1) \simeq \mathbb{Z}$
- $H^1(S^\times S^1) \simeq H^1(S^1) \otimes H^0(S^1) \oplus H^0(S^1) \otimes H^1(S^1) \simeq < \alpha_1(z \otimes 1), \alpha_1(1 \otimes z) > \simeq < x, y >_\mathbb{Z}$
- $H^2(S^1 \times S^1) \simeq H^(S^1) \otimes H^1(S^1) \simeq < \alpha_2(z \otimes z) >_\mathbb{Z}$

Ora la struttura di $\mathbb{Z}$-modulo è data da $\smile$: $H^0(S^1 \times S^1) \otimes H^i(S^1 \times S^1) \to H^i(S^1 \times S^1)$. Bisogna quindi solo verificare che $x \smile x = y \smile y = 0$ e $y \smile x = \alpha_2(z \otimes -z) = -x \smile y$.

Queste seguono tutte dall'esercizio 2, infatti:

1. $x \smile x = \alpha_1(z \otimes 1) \smile \alpha_1(z \otimes 1) = (-1)^0 \alpha_2((z \smile z) \otimes (z \smile z)) \overset{(*)}{=} \alpha_2(0 \otimes 0) = 0$ dove in $(*)$ usiamo il fatto che $\smile$: $H^(S^1) \otimes H^(S^1) \to H^2(S^1) \simeq 0$.
   E analogamente si verifica che $y \smile y = 0$.
2. $y \smile x = \alpha_1(1 \otimes z) \smile \alpha_1(z \otimes 1) = (-1)^1 \alpha_2((1 \smile z) \otimes \alpha_1(z \smile 1)) = -\alpha_2(-z \otimes z) = \alpha_2(z \otimes z)$
3. $x \smile y = \alpha_1(z \otimes 1) \smile \alpha_1(1 \otimes z) = (-1)^0 \alpha_2((z \smile 1) \otimes \alpha_1(1 \smile z)) = \alpha_2(z \otimes -z) = -\alpha_2(z \otimes z)$

Soluzione esercizio 3.4

a) Definiamo un'orientazione su Y, scegliendo μ_y $\forall y$.
Per ogni $y \in Y$, sia $\pi(U) \in U \subset X$ un aperto banalizzante per π e V la componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ che contiene y. Vale $V \simeq U$. Allora

$$H_n(Y, Y \setminus \{y\}) \overset{\text{exc.}}{\simeq} H_n(V, V \setminus \{y\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{\pi(y)\}) \overset{\text{exc.}}{\simeq} H_n(X, X \setminus \{\pi(y)\})$$

definiamo μ_y come l'elemento di $H_n(Y, Y \setminus \{y\})$ che corrisponde a $\mu_{\pi(y)} \in H_n(X, X \setminus \{\pi(x)\})$ tramite questo isomorfismo.

Vediamo che questa scelta dei μ_y è coerente, ovvero che $\forall y$ $\exists K \subset Y$ compatto con $y \in K$ ed esiste μ_K tale che $H_n(Y, Y \setminus K) \to H_n(Y, Y \setminus \{z\})$ manda μ_K in μ_z $\forall z \in K$.

Scelgo y: supponiamo esista $y \in K \subset V$ compatto.
Allora $\pi(y) \in \pi(K) \subset U$ è ancora compatto (immagine di un compatto tramite una funzione continua) e poiché X è orientabile esiste una classe fondamentale $\mu_{\pi(K)} \in H_n(X, X \setminus \pi(K))$. Anche in questo caso vale $H_n(Y, Y \setminus K) \simeq H_n(X, X \setminus \pi(K))$ e scegliamo μ_K come l'immagine di $\mu_{\pi(K)}$ tramite questo isomorfismo. Chiaramente questa scelta di μ_K garantisce la compatibilità cercata, infatti $\forall z \in K \subset V$ il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, X \setminus \pi(K)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_n(X, X \setminus \{\pi(z)\}) \arrow[d, "\wr"] \\
H_n(Y, Y \setminus K) \arrow[r] & H_n(Y, Y \setminus \{z\})
\end{tikzcd}$$

ora la mappa superiore manda $\mu_{\pi(K)}$ in $\mu_{\pi(z)}$ perché $\mu_{\pi(K)}$ è una classe fondamentale, e quindi per come abbiamo scelto μ_K e μ_z anche la mappa inferiore manda μ_K in μ_z.

Osserviamo che dato y troviamo sempre un compatto $K \subset V$.
Sia L un compatto di Y che contiene y, e per ogni $y \neq z \in L$ sia U_z un aperto trivializzante che contiene $\pi(z)$ e V_z la componente connessa di z in $\pi^{-1}(U_z)$ (poiché gli spazi sono T2 possiamo supporre che $\pi(y) \notin U_z$, quindi $y \notin V_z$). Allora $L \subset \bigcup V_z \cup V$ e per compattezza abbiamo $L \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \cup V$. Scegliamo $K = L \cap (X \setminus \bigcup V_i)$: questo è un compatto (chiuso contenuto in un compatto) che contiene y (infatti $y \notin V_i \forall i$). Inoltre $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \cup V \cap (X \setminus \bigcup V_i) \subset V$.

b) Sia $\alpha : S^n \to S^n$ la mappa antipodale: vale $\alpha(S^n \setminus \{x\}) = S^n \setminus \{\alpha(x)\}$, quindi questa mappa induce

$$\begin{tikzcd}
\mu_x \in H_n(S^n, S^n \setminus \{x\}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n(S^n) \ni \mu \arrow[d, "\alpha_*"] \\
\alpha_*(\mu_x) \in H_n(S^n, S^n \setminus \{\alpha(x)\}) \arrow[r, "\sim"] & H_n(S^n) \ni \alpha_*(\mu)
\end{tikzcd}$$

Inoltre sappiamo che α_* ha grado $(-1)^{n+1}$ quindi è id se n è dispari, meno $-$id altrimenti.

Considero $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ questo è un rivestimento di grado 2: dimostro che per n dispari $\mathbb{RP}^n$, S^n induce un'orientazione su $\mathbb{RP}^n$.
Sia $y \in \mathbb{RP}^n$ allora $\pi^{-1}(y) = \{x, \alpha(x)\}$. Scelgo μ_y come l'immagine di μ_x tramite l'isomorfismo $H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{y\}) \simeq H_n(S^n, S^n \setminus \{x\})$ (ottenuto come quelli al punto a)). Per quanto osservato prima questa definizione è ben posta (cioè non dipende da x): infatti nel caso n

dispari, $\alpha_*(\mu) = \mu$ e quindi anche $\alpha_*(\mu_x) = \mu_{\alpha(x)}$, cioè $\mu_{\alpha(x)}$ e μ_x hanno la stessa immagine in $H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{y\})$: infatti nel seguente diagramma la mappa fra $H_n(S^n, S^n \setminus \{x\}$ e $H_n(S^n, S^n \setminus \{\alpha(x)\})$ è proprio α_*

$$\begin{tikzcd}
\mu_x \in H_n(S^n, S^n \setminus \{x\}) \arrow[rr, "\alpha_*"] \arrow[dr] & & H_n(S^n, S^n \setminus \{\alpha(x)\}) \ni \alpha_*(\mu(x)) = \mu_{\alpha(x)} \arrow[dl] \\
& H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{y\}) &
\end{tikzcd}$$

Inoltre anche questa orientazione è localmente coerente: infatti per ogni $y \in \mathbb{RP}^n$, sia $K \subset S^n$ tale che $x \in K$ e $\pi(x) \in y$: allora $\pi(K) = L$ è un compatto che contiene y. Ora $\forall z \in L$, per quanto detto prima μ_z è l'immagine di μ_{x_z} in $H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{y\}$ dove indico con $x_z = \pi^{-1}(z) \cap K$. Scegliamo allora μ_L come l'immagine di μ_K tramite $H_n(S^n, S^n \setminus K) \simeq H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus L)$ e vale:

$$\begin{tikzcd}
\mu_K \in H_n(S^n, S^n \setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_n(S^n, S^n \setminus \{x_z\}) \ni \mu_{x_z} \arrow[d, "\wr"] \\
\mu_L \in H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus L) \arrow[r] & H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{\mu_z\}) \ni \mu_z
\end{tikzcd}$$

cioè la mappa $H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus L) \to H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{\mu_z\})$ manda μ_L in μ_z

Abbiamo già visto a lezione che non $\mathbb{RP}^n$ non ammette orientazione se n è pari, comunque è anche una semplice conseguenza di quanto appena detto: se $\mathbb{RP}^n$ fosse orientabile, allora indurrebbe per il punto a) una orientazione su $\S^n$ tale che μ_x e $\mu_{\alpha(x)}$ hanno la stessa immagine in $H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{\pi(x)\})$: ma quindi con un diagramma simile a quello sopra si avrebbe $\alpha_*(\mu_x) = \mu_{\alpha(x)}$, che non è vero se n è pari per le considerazioni fatte all'inizio.

Soluzione esercizio 3.5

Dalla versione generalizzata della dualità di Poincarè, sappiamo che $H_n(X) \simeq H^0_c(X)$, quindi basta dimostrare che $H^0_c(X) \simeq 0$.

Ora $H^0_c(X) = H^0(S^\bullet_c(X))$: sia allora $0 \longrightarrow S^0_c(X) \xrightarrow{\delta} S^1_c(X)$ e $\alpha \in S^0_c(X)$ tale che $\delta(\alpha) = 0$. Allora eisste $K \subset\neq X$ tale che $\alpha \in \operatorname{Hom}(S_0(X, X \setminus K), \mathbb{Z})$ voglio dire che $\alpha = 0$. Per ogni $x \in X$, sia $\gamma : \Delta_1 \to X$ tale che $\gamma(1) = y \notin K$ (esiste perchè X non è compatta) e $\gamma(0) = x$, allora $\alpha([y]) = 0$ perché $[y] \in X \setminus K$

$$0 = \delta(\alpha)(\gamma) = \alpha(\delta(\gamma)) = \alpha([y]) - \alpha([x]) = -\alpha([x])$$

quindi in effetti $\alpha \equiv 0$, cioè $H^0_c(X) = H^0(S^\bullet_c(X)) = 0$.

ALGEBRAIC TOPOLOGY
Homework 4

1. We have seen in class that $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$. Consider the map $S^2 \to S^2$ given by permuting the factors S^1 in $S^1 \wedge S^1$. Show that the induced map $H_2(S^2) \to H_2(S^2)$ has degree -1.

2. Assume that $f : S^i \to X$ represents the zero class in $\pi_i(X, x_0)$, where x_0 is the image of a base point $* \in S^i$. Prove that f extends to a continuous map $E^{i+1} \to X$. [*Hint:* Consider the map $S^i \times I \to E^{i+1}$ given by $(x, t) \mapsto tx + (1 - t)*$.]

3. *a*) Verify that $\pi_i(X, X, x_0) = 0$ for all $i > 1$.
b) Deduce the converse statement to Exercise 2: if f extends to a continuous map $E^{i+1} \to X$, then f represents the zero class in $\pi_i(X, x_0)$.

4. Let X be an n-connected CW complex such that X has dimension $\leq n$ (i.e. $X = X^n$). Show that X is contractible.

[*Warning:* The assumptions do NOT imply that $\pi_i(X) = 0$ for $i > n$!]

5. Recall that S^n can be given a CW structure with two i-cells for each $0 \leq i \leq n$, by attaching inductively two i-cells to S^{i-1} so that S^{i-1} becomes the equator of S^i. Performing this construction infinitely many times, we obtain a CW complex S^∞.

Show that S^∞ is contractible. [*Hint:* Compute homotopy groups first.]

Soluzione esercizio 4.1

Osserviamo per prima cosa che, identificando $S^1 = I/\{0,1\}$,

$$S^1 \wedge S^1 = \frac{S^1 \times S^1}{S^1 \times \{*\} \cup \{*\} \times S^1} = \frac{I \times I}{I \times \{0,1\} \cup I \times \{1,0\}}$$

quindi $S^1 \wedge S^1$ è dato dal quadrato unitario Q di vertici $A = (0,0)$,$B = (1,0)$, $C = (1,1)$, $D = (0,1)$ in cui quozientiamo il perimetro. Sia $\pi : Q \to S^1 \wedge S^1$ la proiezione.

La mappa $\rho : S^1 \wedge S^1 \to S^1 \wedge S^1$ che scambia le coordinate è quindi data dalla riflessione di Q rispetto alla diagonale AC composta con π.

Consideriamo il ricoprimento aperto $S^2 \simeq S^1 \wedge S^1 = U \cup V$ con U e V rispettivamente intorni contrattili di $\pi(\triangle ABD)$ e $\pi(\triangle BCD)$, allora $U \cap V$ si retrae per deformazione su $\pi(AD) = S^1$.

Osserviamo inoltre che $\rho(U) = U$, $\rho(V) = V$ ed in particolare $\rho' = \rho_{|S^1} : S^1 = \pi(AD) \to \pi(AD) = S^1$ è la riflessione rispetto ad un diametro.

Quindi il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 = H_2(U) \oplus H_2(V) \arrow[r] & H_2(S^2) \arrow[r, "\sim", "\delta"'] \arrow[d, "\rho"'] & H_1(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\rho'"'] & H_1(U) \oplus H_1(V) = 0 \\
0 = H_2(U) \oplus H_2(V) \arrow[r] & H_2(S^2) \arrow[r, "\sim", "\delta"'] & H_1(S^1) \arrow[r] & H_1(U) \oplus H_1(V) = 0
\end{tikzcd}$$

dove le due successioni esatte orizzontali sono la successione di Mayer-Vietories.

Inoltre il grado di ρ' è -1 perché, detto z un generatore di $H^1(S^1) = \mathbb{Z}$ (parametrizzazione della circonferenza in senso orario), $\rho'(z) = -z$.

Quindi: $\rho = \delta^{-1}\rho'\delta$ e $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ quindi è ben definito $\deg \delta$ e vale $\deg \delta \deg \delta^{-1} = 1$. Troviamo $\deg \rho = \deg \delta^{-1} \deg \rho' \deg \delta = \deg \rho' = -1$.

Soluzione esercizio 4.2

Sia $G : S^i \times I \to E^{i+1}$ definita da $G(x,t) = tx + (1-t)*$: è una funzione continua e surgettiva, e inoltre è chiusa in quanto funzione continua da un compatto a un T2, quindi è una identificazione.

Quindi G fattorizza nel seguente modo

$$\begin{tikzcd}
S^i \times I \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\pi"] & E^{i+1} \\
\frac{S^i \times I}{\sim} \arrow[ur, "\tilde{G}"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $(x,t) \sim (y,s) \iff G(x,t) = G(y,s)$ e la mappa $\tilde{G}$ è un omeomorfismo.

Osserviamo che $G(x,t) = G(y,s) \iff G(x,t) = *$ e $G^{-1}(*) = \{(x,t) | t = 0 \text{ oppure } x = *\}$, quindi

$$\frac{S^i \times I}{\sim} = \frac{S^i \times I}{* \times I \cup S^i \times \{0\}}$$

Sappiamo che $f : S^i \to X \in \pi_i(X, x_0)$ è omotopa a 0, quindi esiste un'omotopia $H : S^i \times I \to X$ tale che $H(x,0) = x_0$, $H(x,1) = f$ e $H(*,t) = x_0$. Quindi H è costante sulle fibre di π e per la proprietà universale delle identificazioni, abbiamo

$$\begin{tikzcd} S^i \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ \frac{S^i \times I}{\sim} \arrow[ur, "\tilde{H}"'] & \end{tikzcd}$$

Abbiamo quindi una mappa $F = \tilde{H} \circ \tilde{G}^{-1} : E^{i+1} \to X$: dico che questa estende f. Infatti

$$F_{|S^i} = \tilde{H} \circ \tilde{G}^{-1}_{|S^i \times \{1\}} = \tilde{H} \circ \pi_{|S^i \times \{1\}} = H_{|S^1 \times \{1\}} = f$$

Soluzione esercizio 4.3

a) Per ogni $[f] \in \pi_i(X, X, x_0)$ consideriamo $H : E^i \times I \to X$ tale che $H(x,t) = f(tx + (1-t)*$. Allora $H_{|S^{i-1} \times I} \subset X$, $H(x,0) = f(*) = x_0$, $H(x,1) = f(x)$ e $H(*,t) = f(*) = x_0$. Quindi H è un'omotopia fra f e $x \mapsto x_0$ in $\pi_i(X, X, x_0)$.
Quindi $\pi_i(X, X, x_0) = 0$.

b) Sia $f : S^i \to X$ che si estende a $F : E^{i+1} \to X$, allora $F : (E^{i+1}, S^i, *) \to (X, X, x_0)$, cioè $[F] \in \pi_i(X, X, x_0) = 0$. Quindi esiste H omotopia di (X, X, x_0) fra F e la mappa $x \mapsto x_0$.
Allora $h = H_{|S^i \times I}$ è una omotopia fra f e $x \mapsto x_0$ infatti, $h(x,1) = H(x,1) = F(x) = f(x)\ \forall x \in S^i$, $h(x,0) = H(x,0) = x_0$ e $h(*,t) = x_0$, ovvero $[f] = [0]$ in $\pi_i(X, x_0)$.

Soluzione esercizio 4.4

In modo analogo alla dimostrazione del celllular approximation theorem si può dimostrare che dato X CW-complex di dimensione $\leq n$ e (Y, T) tale che $\pi_i(Y, T) = 0\ \forall i \leq n$, ogni mappa $X \to Y$ è omotopa ad una mappa da $X \to T$.

Dato X un n-connected CW-complex di dimensione $\leq n$, consideriamo la mappa $\mathrm{id} : X \to X$: poiché X è n-connected, $\pi_i(X, x_0) = 0\ \forall i \leq n$, quindi id è omotopa alla mappa $X \to x_0$, ovvero X è contrattile.

Soluzione esercizio 4.5

Osserviamo per prima cosa che, per costruzione $(S^\infty)^m = S^m$, quindi (S^∞, S^m) è m-connessa, quindi in particolare $\pi_i(S^\infty, S^m) = 0\ \forall i \leq m$. Consideriamo adesso la relative homotopy sequence per (S^∞, S^m): abbiamo

$$0 = \pi_m(S^\infty, S^m) \longrightarrow \pi_{m-1}(S^m) \longrightarrow \pi_{m-1}(S^\infty) \longrightarrow \pi_{m-1}(S^\infty, S^m) = 0$$

Quindi per ogni m, $\pi_{m-1}(S^\infty) \simeq \pi_{m-1}(S^m) \simeq 0$ per quanto abbiamo visto a lezione.

Allora S^∞ è un CW complex con $\pi_i(S^\infty, *) = 0\ \forall i$. Dalla proposizione riportata all'esercizio 4 nel caso in cui X sia un CW complex di dimensione infinita, abbiamo che data (Y, T) tale che $\pi_i(Y, T) = 0\ \forall$, ogni mappa $X \to Y$ è omotopa ad una mappa $X \to T$.

Nel nostro caso usando $(S^\infty, *)$ troviamo che $\mathrm{id} : S^\infty \to S^\infty$ è omotopa alla mappa $S^\infty \to *$, cioè S^∞ è contrattile.