ALGEBRA SUPERIORE

FRANCESCA RIZZO - 25/3/21

(1)
- Dire se la funzione $H(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 3 & n=1,3 \\ 4 & n=2 \\ 2 & n \geq 4 \end{cases}$ è ammissibile e in tal caso determinare $A = R/I$ graduato tc $H = H_A$.
- È possibile trovare B graduato e ridotto con $H = H_B$?
- Determinare, se possibile, anelli graduati A, A' tc $H_A = H_{A'} = H$ ma con risoluzioni diverse.

(2) Sia $I \subseteq R = k[x_{ij} : i=1,2 \text{ e } j=1,\dots,n]$ l'ideale generato dai minori 2×2 della matrice $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1\dots n}}$.
Sia $\varphi : R \to k[y_1, y_2, z_1, \dots, z_n]$ l'omomorfismo definito da $x_{ij} \to y_i z_j \ \forall i,j$.
- I è primo?
- $I = \operatorname{Ker}\varphi$?
- $\exists$ una R/I-successione lunga $n+1$?
- Calcolare $\dim R/I$ ed $e(R/I)$.
- Dire se R/I è CM? Gorenstein?

(3) Sia I un ideale omogeneo di $R = k[x_1, x_2, x_3]$ generato da quadriche e sia $A = R/I$.

* Provare che
- se $l \in R_1$ tc $\bar{l} \in Soc(A)$ allora esiste una quadrica q tc $I \subseteq (l, q)$
- Il tipo di A è 2

* Quali sono i numeri di Betti di A?

(4) Sia $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anello locale noetheriano CM. Provare che A è Gorenstein $\iff$ esiste un sop $x_1, \dots, x_d$ di A t.c. $(x_1, \dots, x_d)$ è irriducibile.

(5) Come si comporta la regolarità di Castelnuovo-Mumford con le sequenze esatte corte?

(6) Sia $(A, \mathfrak{m}, k)$ locale noetheriano, E il guscio iniettivo di k. Per ogni A-modulo M sia $M^\vee = \operatorname{Hom}_A(M, E)$. Provare che se $f : M \to N$ omo tc $f^\vee : N^\vee \to M^\vee$ è iso $\Rightarrow f$ è iso.

Esercizi A.S.A - Francesca Rizzo.

1)

	0	1	2	3	4	5	
H	1	3	4	3	2	2	..
ΔH	1	2	3	-1	-1	0	...

Sia $I = (x^2, xy, xz^2, y^4, y^3z, y^2z^2) \subset R = k[x,y,z]$

Vale per $t \leq 3$, $H_{R/I}(t) = H(t)$ (conto)

Per $t \geq 4$: gli unici monomi di deg t non in $A = R/I$ sono yz^{t-1}, z^t

$a<2$: $a=1 \to b=0,\ c\leq 2$ ass

$a=0 \to c \neq 0$: e $b<2 \to b=1,\ c=t-1$

$b=0,\ c=t$

$\to H_A = H$

Inoltre $P_A(z) = 1+2z+3z^2-z^3-z^4 / (1-z)$

In particolare osserviamo che $P_A = \frac{h(z)}{1-z}$ ma $h(z)$ non è ammissibile (ha dei coef negativi)

$\to \nexists\ B$ ndom grad std tc. $P_B = P_A$.

Infine consideriamo $J = (x^2, y^2z, z^2)$ allora

	0	1	2	3	4	5
$H_{R/J}$	1	3	4	3	2	2

In grado $t \geq 4$ abbiamo $x^a y^b z^c$: $c=1$: $b<2,\ a<2$ ass

$c=0$: $a=0 \to b=t$

$a=1 \to b=t-1$

$J = (x^2, y^2z, z^2)$ $\quad A' = R/J$

$I = (x^2, xy, xz^2, y^4, y^3z, y^2z^2)$ $\quad A = R/I$

hanno ris. diverse!

Infatti $\beta_{1i}(A') = 0 \quad \forall i \neq 2$

$\beta_{13}(A) = 1$

$R(-2)^3 \to R \to A'$

$R(-2)^2 \oplus R(-3) \oplus R(-4)^3 \to R \to A$

2) $R = k[x_{ij} : i=1,2,\ j=1,\dots,n]$, $I = < x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j} \mid j<k >$

$$\varphi : R \longrightarrow k[y_1, y_2, z_1, \dots, z_n] \qquad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \end{pmatrix}$$
$$x_{ij} \mapsto y_i z_j$$

Chiaramente $I \subseteq \ker \varphi$ $\left(\varphi(x_{1j}x_{2k}) = \varphi(x_{1k}x_{2j})\right)$

Vediamo che è un $=$: osserviamo per prima cosa che mod I i monomi sono del tipo

$$x^{a,b} = x_{11}^{a_1} \dots x_{1n}^{a_n}\ x_{21}^{b_1} \dots x_{2n}^{b_n} \quad \text{t.c se } b_i \neq 0 \Rightarrow \forall j>i\ a_j = 0$$

se $b_i \neq 0$ ed $\exists j>i$ t.c. $a_j \neq 0 \rightarrow x^{a,b} \equiv x_{11}^{a_1} \dots x_{1i}^{a_i+1} \dots x_{1j}^{a_j-1} \dots x_{1n}\ x_{21}^{b_1} \dots x_{2i}^{b_i-1} \dots x_{2j}^{b_j+1} \dots x_{2n}$

A forza di scambi : $\begin{cases} b_i \mapsto 0 & \text{quindi il min in } i+1 \\ a_j \mapsto 0 & \text{quindi non c'è più problema in } j \end{cases}$

Iterando questo ragionamento otteniamo che uno classe di rappr dei monomi è

$$x_{11}^{a_1} \dots x_{1i}^{a_i}\ x_{2i}^{b_i} \dots x_{2n}^{b_n} \quad \text{con } b_i \neq 0$$

Sia $p(x) = \sum_{a,b,i} c_{a,b} \cdot x_{11}^{a_1} \dots x_{1i}^{a_i}\ x_{2i}^{b_i} \dots x_{2n}^{b_n} \in \ker\varphi$

$$\rightarrow \sum_{a,b} c_{a,b}\ y_1^{\bar a}\ y_2^{\bar b}\ z_1^{a_1} \dots z_i^{a_i+b_i} \dots z_n^{b_n} = 0 \qquad \begin{matrix} \bar a = a_1 + \dots + a_i = \sum a \\ \bar b = b_1 + \dots + b_i \end{matrix}$$

Siano $a = a_1, \dots, a_i$ $\quad b = b_i, \dots, b_n$ $\quad$ che danno lo stesso monomio via φ
$j \geq i$ $\quad \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_j$ $\quad \beta = \beta_j, \dots, \beta_n$

$\rightarrow a_1 = \alpha_1, \dots, a_{i-1} = \alpha_{i-1}, \quad \bar a = \bar\alpha \rightarrow a_i = \alpha_i + \dots + \alpha_j$

Se $j>i$: $a_i + b_i = \alpha_i \leq a_i$ ass perché $b_i \neq 0$, $j=i$
e vale $a_i + b_i = \alpha_i + \beta_i$ con $\alpha_i = a_i \rightarrow b_i = \beta_i$
$b_{i+1} = \beta_{i+1}, \dots, b_n = \beta_n$

$\Bigg\}$ $\begin{matrix} \alpha = a \\ \beta = b \end{matrix}$

$\rightarrow$ tutti i monomi di $\varphi(p(x))$ sono distinti $\rightarrow c_{a,b} = 0 \rightarrow p = 0$

quindi $\boxed{\ker(\varphi) = I} \rightarrow R/_I \hookrightarrow k[y_1, y_2, z_1, \dots, z_n]$ inj

$\Rightarrow R/_I$ dominio $\Rightarrow \boxed{I \text{ primo}}$

- Calcoliamo la funzione di Hilbert di I : $H_{R/_I} = H_{R/_{Lt(I)}}$

$Lt(I) = < x_{1j}x_{2k} \mid j<k >$ quindi

$$H_{R/_{Lt(I)}}(d) = n \binom{n+d-1}{d-1} + \binom{n-1+d}{d} = \binom{n-1+d}{d}(d+1)$$

I monomi in $R/_{Lt(I)}$ sono $X_{11}^{a_1} \cdots X_{1n}^{a_n} X_{21}^{b_1} \cdots X_{2n}^{b_n}$
dove se $a_i \neq 0 \to b_j = 0 \ \forall j \leq i$

$\to X_{1i}^{a_i} \cdots X_{1n}^{a_n} X_{21}^{b_1} \cdots X_{2i}^{b_i}$

Il primo fattore conta monomi per cui $a_i \geq 1 : \forall i = 1, \dots, n$
Il secondo i monomi in solo X_{2i}

$$\to P_{R/LT(I)}(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \binom{n-1+d}{d} (d+1) z^d = \left(z \sum_{d=0}^{\infty} \binom{n-1+d}{d} z^d \right)'$$

$$= \left(\frac{z}{(1-z)^n} \right)' = \frac{1}{(1-z)^n} + \frac{nz}{(1-z)^{n+1}} = \frac{1+(n-1)z}{(1-z)^{n+1}}$$

$\longrightarrow \dim R/_I = n+1, \quad e(R/_I) = n.$

Osservo che l'h-vettore di $R/_I$ è $1, n-1$, quindi se $n-1 \neq 1$, $n \neq 2$
$R/_I$ <u>non</u> Gor

Per <u>$n=2$</u> : $k[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}] / (x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$ è Gor

perché quot di un anello Gor per un elemento regolare (*)

Per $n \geq 3$: ho trovato

- grade$(I, R) = n-1$ perché $\{ x_{11}x_{2j} - x_{1j}x_{11} \}_{j \geq 1}$ seq reg in I
- depth$(R/_I) \geq n$: $k[y_1, y_2, z_1, \dots, z_n]$ ho $\{ y_1 y_2 z_i^2 \}_{i=1,\dots,n}$ reg

(*) $A = \overset{n}{R}/_{(f_1, \dots, f_k)}$ $\underline{f_i}$ reg : $\dim(A) = n-k$

A Gor $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ext}^{n-k}(k, A) = \mathrm{Hom}(k, A/_{g_1, \dots, g_{n-k}}) = \mathrm{Hom}(k, R/_{(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_{n-k})})$
$= \mathrm{Ext}^n(k, R) = 1 \Leftrightarrow R$ Gor

3) $A = R/I$, $R = k[x_1, x_2, x_3]$, $P_A(z) = 1 + 3z + 2z^2$

* $\ell \in R_1$ t.c. $\bar{\ell} \in \operatorname{soc} A \Rightarrow I \subseteq (\ell, q)$ per qualche $q \in R_2$

So che $\ell x_i \in I_2$ $\forall i$, $\dim_{R_2} I_2 = 6 - 2 = 4$
quindi poiché $\{\ell x_i\}_i$ lin indip in R_2 $\exists$ $q \in R_2$ t.c. $I_2 = \{\ell x_i, q\}_i$
$\rightarrow I = (I_2) = (q, \ell x_i)_i \subseteq (\ell, q)$

Oss: quindi $\operatorname{soc}(A) \cap A_1 = 0$: infatti $\dim A = 0$, se $I \subseteq (\ell, q)$ allora

$0 = \dim A \geqslant \dim R/(\ell, q) \geqslant 1$ che è assurdo
$\rightarrow \operatorname{soc}(A) \subseteq A_2$

Ma $A_i = 0$ $\forall i > 2 \rightarrow A_2 \subseteq \operatorname{soc}(A) \Rightarrow \operatorname{soc}(A) = A_2$ e ho dim 2 su k
(F di Hilbert)

$\rightarrow$ A artiniano, tipo di A è $\dim_k \operatorname{soc} A = 2$.

A artiniano $\rightarrow$ depth $A = 0$ quindi proj dim A = depth $R = 3$

$$0 \rightarrow \bigoplus R(-j)^{b_j} \rightarrow \bigoplus R(-j)^{a_j} \rightarrow R(-2)^{x} \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

3 2 1 0

- I generato in deg 2 e $\dim I_2 = 4 \rightarrow I$ ha 4 generatori: $x = 4$

indeg$(A) = 2$
$\dim \operatorname{soc}(A) = 2$ $\rightarrow$ $\operatorname{indeg} A + i - 1 \leq d_{ij} \leq \dim \operatorname{soc} A + i$

$i+1 \leq d_{ij} \leq i+2$

quindi $a_j = 0$ $\forall j \neq 3, 4$, $b_j = 0$ $\forall j \neq 4, 5$

- Polinomio di Hilbert

$$1 - 4z^2 + (a_3 z^3 + a_4 z^4) - (b_4 z^4 + b_5 z^5) = (1 + 3z + 2z^2)(1 - z)^3$$

$$= 1 - 4z^2 + 2z^3 + 3z^4 - 2z^5$$

$a_3 = 2$, $a_4 - b_4 = 3$, $b_5 = 2$

- $\underset{\overset{\parallel}{2}}{t(A)} = \sum b_j = b_4 + b_5 = 2 + b_4 \rightarrow b_4 = 0$, $a_4 = 3$

quindi: $0 \rightarrow R(-5)^2 \rightarrow R(-3)^2 \oplus R(-4)^3 \rightarrow R(-2)^4 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$

Inoltre $I = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2)$ è un esempio che soddisfa le ipotesi.

4) A loc noeth CM : Gor $\iff \exists\ (x_1, \dots, x_n)$ sop irriducibile

<u>Oss</u>: A artiniano : (0) irrid $\iff$ $\dim \operatorname{soc} A = 1$ $\iff$ A Gor

Infatti $\operatorname{soc}(A) \simeq \operatorname{Hom}(k, A)$:

- $t(A) > 1 \Rightarrow \exists\ \varphi, \psi : k \hookrightarrow A$ distinte (non lin dip) $\to$ $I = \operatorname{Im}\varphi$, $J = \operatorname{Im}\psi$, $I \neq J$

  Vale $I \cap J = (0)$

  se $x \in I \cap J$: $x = \varphi(\bar a) = \psi(\bar b) \to \varphi(1) = \psi(\bar b \bar a^{-1})$ e assurdo

- $t(A) = 1$ e suppo $\exists\ I, J$ t.c. $I \cap J = (0)$

  A Gor. artiniano : $\forall\ I$ ideale, $\exists\ n$: $m^n I \subseteq \operatorname{soc}(m)$

  $n+1 = \min\{\ell : I m^\ell = 0\}$

  quindi $m^n I \subseteq I \to 0 \neq I \cap \operatorname{soc}(m) \subseteq \underset{\substack{\shortparallel \\ \dim 1}}{\operatorname{soc}(m)} \to \operatorname{soc}(m) \subseteq I$

  $\to \operatorname{soc}(m) \subseteq I \cap J \neq (0)\ \ \forall\ I, J \neq (0)$

Quindi:

- A Gorenstein e sia $(x_1, \dots, x_d)$ sop :

  $k \simeq \operatorname{Ext}^d(k, A) \simeq \operatorname{Hom}(k, \underbrace{A/(x_1, \dots, x_d)}_{B})$: B Gor artiniano $\to (0)$ irriducibile $\Rightarrow (x_1, \dots, x_d)$ irriducibile

- $(x_1, \dots, x_d)$ sop irriducibile : $A/(x_1, \dots, x_d)$ Gor

  $k \simeq \operatorname{Hom}(k, A/(x_1, \dots, x_d)) \simeq \operatorname{Ext}^d(k, A)$

(*) Stiamo usando che in A CM : $(x_1, \dots, x_d)$ sop $\Rightarrow$ regular sequence

Ind su i che $x_i \notin Z(A/(x_1, \dots, x_{i-1}))$

Ip induttiva: $B = A/(x_1, \dots, x_{i-1})$ CM : e supp : x_i zero div: $\exists\ \bar{q} \in \operatorname{Ass}(B)$: $(x_1, \dots, x_i) \subseteq q$

$d - i + 1 = d - (i-1) = \dim B = \dim B/q \leq \dim A/(x_1, \dots, x_i) = d - i$

5) Vale $\operatorname{reg}(M) = \max\{t \mid \operatorname{Ext}^i_{-t-i}(M,R) \neq 0$ per qualche $i\}$

$F_i = \bigoplus R(-j)^{\beta_{ij}}$ $\quad 0 \to F_n \to \cdots \to F_i \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$

Sia t_i, $t_i(M) = \max\{j \mid \beta_{ij} \neq 0\} \to \operatorname{reg}(M) = \max_i \{t_i - i\} = m$

- Allora $F_i = \bigoplus_{j \le t_i} R(-j)^{\beta_{ij}} \to F_i^* = \operatorname{Hom}(F_i, R)$
$= \bigoplus \operatorname{Hom}(R(-j), R)^{\beta_{ij}}$
$= \bigoplus_{j \le t_i} \operatorname{Hom}(R,R)(j) = \bigoplus_{j \le t_i} R(j)^{\beta_{ij}}$

cioè $F_i^* = \bigoplus_{k \ge -t_i} R(-k)^{\beta_i(-k)}$

in particolare, poiché $t_i - i \le m \to t_i \le m+i$, il minimo shift è $\ge -m-i$

quindi se $t > m$ (max) $\to \operatorname{Ext}^i_{-(t+i)} = 0$. Da cui $\ge$.

$t_{j+1} \le m+j+1$

- Sia j t.c. $t_j - j = m$, allora:

$$F_j^* = R(m+j)^{\beta_i(m+j)} \oplus \bigoplus_{\ell < m+j} R(\ell)^{\beta_{i\ell}} \xrightarrow{\partial_j^*} F_{j+1}^* = \bigoplus_{k \le t_{j+1}} F(k)^{\beta_{ik}}$$

per minimalità $R(m+j) \to R(n)$ con $n \ge m+j+1$. ∴
$\to R(m+j)^\beta \subseteq \ker \partial_i^*$ $\quad \operatorname{Ext}^j_{-(m+j)} \neq 0$.
Inoltre, non è possibile $R(m+j)^\beta \subseteq \operatorname{Im} \partial_{j-1}^*$ per minimalità:

6) (A, m, k) loc noetheriano. $E(k) = E$

$f: M \to N$ t.c. $f^\vee : N^\vee \to M^\vee$ isomorfismo $\Rightarrow f$ isomorfismo

- $M^\vee = \operatorname{Hom}(M, E) = 0 \Rightarrow M = 0$

$N \subseteq M$ $\quad N$ fin gen : $N \to N/mN \simeq k^\alpha \to k \subseteq E$

omo non nullo
$$\begin{array}{ccc} N & \to & E \\ \cap & \nearrow & \\ M & & \end{array}$$

si estende a M perché E iniettivo.

$M \xrightarrow{f} N \to Q \to 0$ esatta $\operatorname{Hom}(\cdot, E)$: $0 \to Q^\vee \to N^\vee \xrightarrow{f^\vee} M^\vee$ + $f^\vee$ inj
$Q^\vee = 0 \to Q = 0$

$\Rightarrow 0 \to K \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ e applico $\operatorname{Hom}(\cdot, E)$

$0 \to N^\vee \xrightarrow{f^\vee} M^\vee \to K^\vee \to 0$ + f surg : $K^\vee = 0 \to K = 0$.