Examen de théorie descriptive des ensembles

Corrigé

Il s'agissait de fournir un autre point de vue par rapport aux résultats de Wesolek - Williams : on a vu que l'espace des groupes dénombrables peut se voir de deux manières :

- l'espace des groupes marqués $\mathcal{G}$
- l'espace des opérations de groupe sur $\mathbb{N}$ (cf. DM3)

Ici, on en ajoute une troisième en utilisant un groupe polonais universel pour les groupes dénombrables : $\mathfrak{S}_\infty$.
↳ groupe topologique dont la topologie est polonaise.

On voit ainsi l'espace des groupes dénombrables comme un sous-espace de l'espace des sous-groupes discrets de $\mathfrak{S}_\infty$

Ici, une des difficultés techniques est alors de montrer que $G \mapsto S_{\mathbb{R}}(G) := [G,G] \cap \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(G)$ est borélienne ; l'avantage est qu'on travaille directement sur les groupes et que l'on a pas besoin de marquages (le théorème de sélection peut cependant nous en fournir).

Pour voir que $G \mapsto S_{\mathbb{R}}(G)$ est borélienne, on fait un détour qui nous permettra de "choisir de manière borélienne parmis un nombre fini d'objets", et on a besoin pour ça du théorème suivant

I/ Théorème de séparation de Novikov

1. On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: le résultat est vrai pour $n = 1$ trivialement.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat établi pour n, et soient $A_1 \dots A_n$ analytiques tels que $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \emptyset$
On applique le théorème de séparation à $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ et } A_{n+1}\right)$
↳ analytique car c'est stable par intersect° dénb
On obtient un borélien B_0 contenant A_{n+1} et disjoint de $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
Alors $(A_i \cap B_0)_{i=1}^{n}$ satisfait l'hypothèse de récurrence, et on trouve donc $B_i \supseteq A_i \cap B_0$ pour $i = 1 \dots n$ avec $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = \emptyset$
Alors $(B_1 \cap (X \setminus B_0), B_2 \cap (X \setminus B_0), \dots, B_n \cap (X \setminus B_0), B_0)$ convient.
Par récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A_1 \dots A_n \in \Sigma^1_1(X)$ disjoints $\exists B_1 \dots B_n$ borélien, $B_i \supseteq A_i \ \forall i$, $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = \emptyset$.

I.2) a) Par l'absurde, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}$, la suite

$$(s_0, \dots, s_{k-1}, s_k \wedge m, s_{k+1}, \dots)$$ n'est pas mauvaise.

Soient alors $B_0^{(m)}, \dots, B_k^{(m)}, \dots$ borélien tels que $\forall i \neq k$

$$A_{s_i}^{(m)} \subseteq B_i^{(m)}$$

$$A_{s_k \wedge m}^{(m)} \subseteq B_k^{(m)}$$

$$\text{et} \quad \bigcap_i B_i^{(m)} = \emptyset$$

On pose alors $C_i = \bigcap_m B_i^{(m)}$ pour $i \neq k$

$$C_k = \bigcup_m B_k^{(m)}$$

alors $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ témoigne du fait que $(s_0, \dots, s_k, s_{k+1})$ n'est pas mauvaise, ce qui est contradictoire.

Ainsi $\exists m \in \mathbb{N} \ / \ (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k \wedge m, s_{k+1}, \dots)$ est mauvaise.

b) L'hypothèse sur $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dit que la suite $(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset \dots)$ est mauvaise. La question précédente nous permet alors de construire par récurrence une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(x_{0 \wedge n}, \dots, x_{n \wedge n}, \emptyset, \emptyset \dots)$$

(A l'étape n, on construit $(s_0, \dots, s_n)$ où $|s_i| = n$ et $(s_0, \dots, s_n, \emptyset, \dots)$ mauvaise et à l'étape $n+1$, on applique d'abord une fois la question a) à chaque s_i, puis $n+1$ fois pour construire s_{n+1} ...)

c) On a par construction que $p_i \in A_i$. En particulier, si tous les p_i sont identiques alors $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, contradiction. Ainsi $\exists i \neq j$ tq $p_i \neq p_j$. Soient U_i et U_j deux ouverts disjoints de X tels que $p_i \in U_i$ et $p_j \in U_j$.

Comme f_i et f_j sont continues, on trouve $n \in \mathbb{N}$ (que l'on peut supposer $\geq i, j$) tel que $f_i(\underbrace{N_{x_i \restriction n}}_{(= A_i^{x_i \restriction n})}) \subseteq U_i$

et $f_j(\underbrace{N_{x_j \restriction n}}_{(= A_j^{x_j \restriction n})}) \subseteq U_j$

Alors les ensembles $(X, X, \dots, X, U_i, X, \dots, X, U_j, X, \dots)$ témoignent que $(x_{0 \restriction n}, \dots, x_{i \restriction n}, \dots, x_{j \restriction n}, x_{n \restriction n}, \emptyset, \emptyset, \dots)$ n'est pas mauvaise, ce qui contredit la question précédente.

On a donc que la suite $(\emptyset, \dots)$ n'est pas mauvaise : $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille d'analytiques tq $\bigcap_n A_n = \emptyset$, $\exists (B_n)$ boréliens avec $A_n \subseteq B_n$ et $\bigcap_n B_n = \emptyset$.

Remarquons que cette preuve est très proche de celle du théorème de séparation vu en cours

II Projection & uniformisation de boréliens à sections compactes

1. Y est séparable (soit d distance compatible) ; si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dense alors $\{B_d(y_n, \frac{1}{k}) : n, k \in \mathbb{N}^*\}$ est une base dénombrable d'ouverts ; en effet il suffit de montrer que toute boule ouverte est réunion de telles boules ; si $y_0 \in Y$ et $y \in B_d(y_0, R)$ on prend $\varepsilon < R - d(y_0, y)$ et $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$: on dispose de y_n tq $d(y, y_n) < \frac{1}{k}$ et par inégalité triangulaire $B_d(y_n, \frac{1}{k}) \subseteq B(y_0, R)$.

Ainsi $\{B_d(y_n, \frac{1}{k})\}$ est bien une base dénombrable d'ouverts de Y.

2. a) On pose $C_n := \{x \in X \,/\, U_n \subseteq (Y \setminus (C_n)_x)\}$

Alors par définition $(X \times Y) \setminus B \supseteq \bigcup_n (C_n \times U_n)$

L'inclusion réciproque provient du fait que $\forall x \in X$, B_x est fermé donc $((X \times Y) \setminus B)_x$ est ouvert donc réunion de certains U_n.

Ainsi $(X \times Y) \setminus B = \bigcup_n (C_n \times U_n)$

Chaque C_n est coanalytique car $x \in C_n \iff \forall y \, (\overbrace{y \in U_n \Rightarrow (x, y) \notin B_n}^{\text{borélien}})$

II-2-b) Par passage au complémentaire et intersection avec un borélien fixé, le théorème de séparation de Novikov nous dit que : si B est un borélien qui s'écrit comme réunion dénombrable de coanalytiques C_n, alors $\forall n\ \exists B_n \subseteq C_n$ borélien tel que $\bigcup_n B_n = B$

Dès après la question a) comme $C_n \times U_n$ est coanalytique, on a (B_n) borélien tels que $\forall n$, $B_n \subseteq C_n \times U_n$ et $(X \times Y) \setminus B = \bigcup_n B_n$

On pose alors $A_n = \pi_X(B_n)$ analytique.

alors $B_n \subseteq A_n \times U_n$ car $B_n \subseteq C_n \times U_n$ et $A_n = \pi_X(B_n)$

et $C_n \supseteq A_n$
$\quad\ \ \| $
$\pi_X(C_n \times U_n)$

Ainsi $(X \times Y) \setminus B = \bigcup_n B_n \subseteq \bigcup_n (A_n \times U_n) \subseteq \bigcup_n (C_n \times U_n) = (X \times Y) \setminus B$

donc par double inclusion $(X \times Y) \setminus B = \bigcup_n (A_n \times U_n)$

c) Le complémentaire de $A \times U_n$ est : $(X \setminus A \times Y) \cup (X \times Y \setminus U_n)$ qui appartient donc à $(\Pi^1_1(X) \otimes F(Y))_\delta$, donc $B \in (\Pi^1_1(X) \otimes F(Y))_{\delta\delta}$

Remarquons que $(\Pi^1_1(X) \otimes F(Y))_\delta$ est stable par intersection finie ainsi B peut bien s'écrire comme intersection dénombrable décroissante d'éléments de $(\Pi^1_1(X) \otimes F(Y))_\delta$

d) On a clairement $\pi_X(\bigcap_n K_n) \subseteq \bigcap_n \pi_X(K_n)$ indépendant de la compacité des sections. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_n \pi_X(K_n)$, soit $y_n \in Y$ tel que $(x, y_n) \in K_n$, alors par compacité on peut extraire une sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ convergeant vers $y \in Y$.

II-2-d)- suite.

Soit d une distance compatible sur Y

Comme $y_{\varphi(n)} \to y$,

on a $d(y, (K_{\varphi(n)})_x) \to 0$

~~Donc~~ comme les $(K_{\varphi(n)})_x$ sont décroissants et compacts, si $y \notin \bigcap_n (K_{\varphi(n)})_x$, c'est qu'il existe n tel que

$y \notin (K_{\varphi(n)})_x$, mais alors si $\varepsilon = d(y, (K_{\varphi(n)})_x)$

on aura $d(y, (K_{\varphi(m)})_x) > \varepsilon \quad \forall m \geq n$, absurde.

Ainsi $y \in \bigcap_n (K_{\varphi(n)})_x = \bigcap_n (K_n)_x$ car les K_n sont decroissants.

Ceci établit $\bigcap_n \pi_X(K_n) \subseteq \pi_X(\bigcap_n K_n)$

donc $\boxed{\bigcap_n \pi_X(K_n) = \pi_X(\bigcap_n K_n)}$

2-e) Tout d'abord, $\pi_X(B)$ est analytique comme image borélienne d'un borélien

De plus, on a $\pi_X(B) = \bigcap_n K_n$

où $K_n \supseteq K_{n+1}$ et $K_n \in (\Pi^1_1(X) \otimes F(Y))_\delta$

d'après 2.c).

Il est clair que si $K_n \in (\Pi^1_1(X) \otimes F(Y))_\delta$ alors

$\pi_X(K_n) \in \Pi^1_1(X)_\delta = \Pi^1_1(X)$

Ainsi, comme K_n est à sections compactes, on a

$\bigcap_n \pi_X(K_n) = \pi_X(\bigcap_n K_n) = \pi_X(B)$ donc $\pi_X(B) \in \Pi^1_1(X)_\delta = \Pi^1_1(X)$

Ainsi $\pi_X(B)$ est à la fois analytique et coanalytique, donc borélien d'après le théorème de séparation.

3. On a vu en cours que Y est homéomorphe à un G_δ de $[0,1]^{\mathbb{N}}$

En particulier, on peut trouver $\tilde{Y}$ compact contenant Y.

Remarquons que les compacts de Y restent compacts dans $\tilde{Y}$ (c'est justement toute la force de la compacité : elle ne dépend pas de l'espace topologique ambiant !)

Ainsi si $B \subseteq X \times Y$ est borélien à sections compactes,

B reste borélien de $X \times \tilde{Y}$ à sections compactes (car Y borélien dans $\tilde{Y}$)

on peut alors appliquer la question précédente et conclure que $\pi_X(B)$ est borélien.

4. a) Soit U ouvert de Y. On cherche à montrer que

$$\{x \in X \mid B_x \cap U \neq \emptyset\} \text{ est borélien}$$

(la structure d'Effros sur $F(Y)$ est en effet engendrée par $\{F \mid F \cap U \neq \emptyset\}$)

Montrons que $\exists (K_n)$ compacts tq $U = \bigcup_n K_n$.

Pour cela, il suffit d'écrire U comme réunion dénombrable de boules fermées (donc compactes car Y est compact). Cela découle d'un raisonnement similaire au 1).

On fixe une telle suite (K_n).

Alors $\{x \mid B_x \cap U \neq \emptyset\} = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : B_x \cap K_n \neq \emptyset\}$

$$= \bigcup_n \{x \mid B_x \cap K_n \neq \emptyset\}$$

$$= \bigcup_n \pi_X(B \cap (X \times K_n))$$

or chaque $B \cap (X \times K_n)$ est un borélien à sections compactes

donc par la question 3, $\pi_X(B \cap (X \times K_n))$ est borélien

et donc $\{x \mid B_x \cap U \neq \emptyset\}$ est borélien, ainsi $x \mapsto B_x$ est borélienne

II-4-b) le théorème de sélection nous fournit $\tilde{f} : F(Y) \to Y$ borélienne tq $\forall F \in F(Y) \setminus \{\emptyset\}, \tilde{f}(F) \in F$.

alors $f(x) = \tilde{f}(B_x)$ pour $x \in \pi_X(B)$ est une uniformisation de B

5. C'est le même raisonnement que pour la question 3.

6. Tout ensemble analytique de X est la projection d'un fermé de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$

Donc si $A \subseteq X$ est analytique non borélien et $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ est tel que $A = \pi_X(F)$, alors F est à sections fermées mais n'admet pas d'uniformisat° borélienne.

Un exemple concret est l'ensemble des couples $(T, x) \in Tr \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (espace des arbres) où x est un bout de T : c'est un fermé dont la projection sur Tr est l'espace des arbres non bien fondés, dont on a vu qu'il est analytique complet, en particulier non borélien.

C'est la question 2-d) qui est complètement fausse si on remplace "section compacte" par "section fermée" : dans $\mathbb{R}^2$, prendre $K_n = \mathbb{R} \times [n, +\infty[$.

La question 4.a) est également fausse en général (en remplaçant compact par fermé) : en fait si $x \mapsto B_x$ est borélienne, $\pi_X(B)$ est borélien car c'est l'ensemble des x tels que $B_x \neq \emptyset$. ↯.

III 1. • Si $g_n \to g$ et $h_n \to h$, soit $k \in \mathbb{N}$, on doit montrer que $g_n h_n(k) = g h(k)$ pour k assez grand.

Soit N_1 tq $\forall n \geq N_1$, $h_n(k) = h(k)$

$N_2 \geq N_1$ tq $\forall n \geq N_1$, $g_n h(k) = g h(k)$

alors $\forall n \geq N_2$, $g_n h_n(k) = g h(k)$.

• Si $g_n \to g$, soit $k \in \mathbb{N}$, soit $l = g^{-1}(k)$. Soit N tq $\forall n \geq N$,

$g_n(\ell) \to g(\ell) = k$, alors $\forall n \geq N$, $g_n^{-1} g_n(\ell) = g_n^{-1}(k)$

soit $g_n^{-1}(k) = \ell$.

ce qui établit la continuité de $g \mapsto g^{-1}$.

Rmq : Un groupe topologique dont la topologie est polonaise est appelé un groupe polonais. les question III.1-2 établissent donc que $\mathcal{S}_\infty$ est un groupe polonais.

2 - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection ssi
- $\forall n \neq m$, $\big(f(n) \neq f(m)\big) \to$ condition ouverte
- $\forall n \; \underbrace{\exists m, \big(f(m) = n\big)}_{\text{condition ouverte}}$

Ainsi $\mathcal{S}_\infty$ est un G_δ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ donc polonais d'après le cours.

3. D'après le théorème de sélection, on dispose $\forall n \in \mathbb{N}$ de $f_n : F(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $\{f_n(F)\}$ est dense dans le fermé non vide F.

Par continuité des opérations de groupe, si $F \in F(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$,

F est un groupe ssi $\forall n, m$, $f_n(F) \cdot f_m(F) \in F$

et $\forall n$, $f_n(F)^{-1} \in F$

Comme les f_n sont boréliens, il suffit de voir que la condit° "$x \in F$" est borélienne

Lemme : $\{(x, F) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times F(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) : x \in F\}$ est borélien.

Preuve du lemme : Soit U_n base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Alors $x \notin F \iff \exists n \mid x \in U_n$ et $F \cap U_n = \emptyset$. $\square$ lemme

On conclut que $SG(\mathcal{S}_\infty)$ est borélien.

4. Remarquons que $g \in G \mapsto g(0)$ est injective : si $g(0) = h(0)$

alors $h^{-1} g(0) = 0$ donc $h^{-1} g = id_{\mathbb{N}}$ donc $h = g$.

Ainsi G est dénombrable. Soit (g_n) suite d'éléments de G convergent vers

$g \in \mathcal{G}_\infty$. Alors $\exists N \; \forall n \geq N, \; g_n(0) = g(0)$

Mais alors comme $\mathcal{G} \to \mathbb{N}$, $g \mapsto g(0)$ est injective on a $\forall n \geq N$, $g_n = g_N$

donc $g = g_N \in \mathcal{G}$. <u>Ainsi $\mathcal{G}$ est fermé.</u>

5. Soit $U = \{ \delta \in \mathcal{G}_\infty : \delta(0) \neq 0 \}$ alors U est un ouvert-fermé de $\mathcal{G}_\infty$.

Montrons que $SG_d(\mathcal{G}_\infty) = \{ F \in SG(\mathcal{G}_\infty) : \forall n, \; (f_n(F) \neq id_{\mathbb{N}} \Rightarrow f_n(F) \in U) \}$

(alors <u>$SG_d(\mathcal{G}_\infty)$ sera clairement borélien</u>)

Soit $F \in SG(\mathcal{G}_\infty)$ tel que $\forall n \; f_n(F) \neq id_{\mathbb{N}} \Rightarrow f_n(F) \in U$.

Alors $F \setminus \{ id_{\mathbb{N}} \}$ contient une partie dense fermée de δ tels que $\delta(0) \neq 0$

Mais la condition $\delta(0) = 0$ est ouverte-fermée, en particulier $\delta(0) \neq 0$ est fermée

donc $F \setminus \{ id_{\mathbb{N}} \}$ a tous ses éléments qui vérifiet $\delta(0) \neq 0$, CQFD.

<u>Autre méthode</u> : $SG_d(\mathcal{G}_\infty) = \{ F \in SG(\mathcal{G}_\infty) : F \cap S = \{ id_{\mathbb{N}} \} \}$

où $S = \{ \delta \mid \delta(0) = 0 \}$ est un fermé de $\mathcal{G}_\infty$

et on vérifie que $F \mapsto F \cap S$ est borélienne . .

6. On applique l'analogue infini du théorème de Cayley (G fini $\Rightarrow \exists n, G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$)

Soit G dénombrable, on identifie G à une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0.

L'action à gauche de G sur G induit alors $i : G \hookrightarrow \mathcal{G}_\infty$

et $i(G) \subseteq SG_d(\mathcal{G}_\infty)$ car G agit sur lui même <u>librement</u> (i.e. $\forall h \in G$, $g \mapsto gh$ est injective)

7. Remarquons que le théorème de sélection nous fournit mieux que $(f_n(F))$ dense : (10)

Si $G \in SG_d(\mathcal{B}_\infty)$, alors $G = \{f_n(G) : n \in \mathbb{N}\}$.

En effet, soit $g \in G$. On dispose de l'une suite n_k

telle que $f_{n_k}(G) \to g$.

soit K tq $\forall k \geq K$, $f_{n_k}(G)(0) = g(0)$

alors $\forall k \geq K$, $f_{n_k}(G) = g$, toujours par injectivité de $g \mapsto g(0)$!

Ainsi $g \in \{f_n(G) : n \in \mathbb{N}\}$.

$F_2 : SG_d(\mathcal{B}_\infty) \to \mathcal{G}$

Alors on vérifie <u>que $G \mapsto (G, (f_0(g), f_1(g), \dots))$ est borélienne</u>

(en effet $f_{i_0}^{\varepsilon_0}(G) \cdots f_{i_k}^{\varepsilon_k}(G) = id_{\mathbb{N}}$ est borélienne ! par continuité des opérations de groupe & le fait que les f_n soient boréliennes)

On a clairement que <u>$F_2(G)$ est isomorphe (en tant que groupe) à G</u> !

Dans l'autre sens ; on dispose de $(g_n) : \mathcal{G} \to \mathbb{F}_\omega$ telles que

- si $\mathbb{F}_\omega / N$ est fini de cardinal k, alors :

$$\mathbb{F}_\omega / N = g_1(N)N \sqcup \cdots \sqcup g_k(N)N$$

- si $\mathbb{F}_\omega / N$ est infini, $\mathbb{F}_\omega / N = \bigsqcup_n g_n(N)N$

(il suffit de définir $g_n(N)$ comme le 1er mot réduit (pour l'ordre lexicographique) tel que $g_n(N)N \neq g_1(N), \dots, g_{n-1}(N)$

et comme 1 si $g_1(N)N \sqcup \cdots \sqcup g_{n-1}(N)N = \mathbb{F}_\omega$)

On pose alors

$$F_2(N) = \begin{cases} \bullet \text{ si } \mathbb{F}_\omega/N = \{ g_1(N)N, \dots g_k(N)N \} \\ \quad \text{l'image de l'action de } \mathbb{F}_\omega \text{ sur } \mathbb{F}_\omega/N \text{ par permutation} \\ \quad \text{dans } \mathfrak{S}_\infty \text{ en identifiant } g_i(N)N \text{ à } i \\ \bullet \text{ si } \mathbb{F}_\omega/N = \{ g_i(N)N : i \in \mathbb{N} \} \\ \quad \text{l'image de l'action de } \mathbb{F}_\omega \text{ sur } \mathbb{F}_\omega/N \text{ par} \\ \quad \text{permutation dans } \mathfrak{S}_\infty \text{ en identifiant } g_i(N)N \text{ à } i \end{cases}$$

Autrement dit, $\sigma \in F_2(N) \iff \exists w \in \mathbb{F}_2, \forall i \in \mathbb{N},$

$$w \cdot g_i(N)N = g_{\sigma(i)}(N)N.$$

On vérifie que F_2 est comme voulu.

8. Si $\mathcal{P}$ définit un borélien B dans l'un des deux modèles, $F_i^{-1}(B)$ est borélien dans l'autre car $\forall G$, $F_i(G) \cong G$ et $\mathcal{P}$ invariante par isomorphisme

donc $F_i^{-1}(B)$ est l'ensemble que définit $\mathcal{P}$ dans l'autre.

donc $\mathcal{P}$ définit un borélien dans l'un ssi elle définit un borélien dans l'autre

9. On a $\sigma \in G \cap H \iff \exists n, m, \ \sigma = f_n(G)$ et $\sigma = f_m(H)$

donc $(G \cap H) \cap U \neq \emptyset \iff \exists n, m : f_n(G) \in U$ et $f_n(G) = f_m(H)$

qui est donc bien borélienne.

⚠ $F(X) \times F(X) \to F(X)$, $(A, B) \mapsto A \cap B$ n'est pas borélienne en général [Ke95, 27.7]

III - 10) $SG_{d,fg} = \{ G \in SG_d : \exists m, \exists k_1 \dots k_m, \forall k,$
$\exists l \in \mathbb{N} \exists i_1, \dots i_l \in \{1, \dots, n\}$
$f_k(G) = f_{k_{i_1}}(G) \dots f_{k_{i_l}}(G) \}$

donc $\underline{SG_{d,fg}}$ est borélien

(on pourrait aussi le déduire du fait que les groupes de type fini forment un borélien de G et de $\mathcal{F}$).

11) Utilisons le corollaire de la partie III qui va nous servir.

Soit X, Y deux boréliens standards. Soit $B \subseteq X \times Y$ borélien à sections finies. Alors B admet une uniformisation borélienne.

(en effet si on munit Y d'une topo polonaise compatible, B est alors à sections compactes)

On va upgrader ce corollaire :

<u>lem</u> Soit $B \subseteq X \times Y$ à sections finies borélien. Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ boréliennes, $f_n : \pi_X(B) \to Y$ tq $\{ f_n(x) : x \in \pi_X(B) \} = B_x$ pour tout $x \in X$

<u>Pv</u> : $(f_i)_{i=1}^{m}$ étant construites (avec f_1 unif. de B), on considère

$$\tilde{B} := B \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \left(\{ (x, f_i(x)) : x \in \pi_X(B) \} \right)$$

C'est un borélien à sections finies, soit $f : \pi_X(\tilde{B}) \to Y$ une uniformisation

On pose $f_{n+1}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \pi_X(\tilde{B}) \\ f_1(x) & \text{si } x \in \pi_X(B) \setminus \pi_X(\tilde{B}) \end{cases}$

$\square$ lemme

(Remarquons que si on a une borne uniforme K sur le cardinal des sections, on peut trouver $f_1, \dots, f_K$ telles que $B_x = \{ f_i(x) : i \in \{1, \dots, K\} \}$)

II - 11) - suite.

Soit maintenant $B_k = \{ (G,H) \in SG_{d,fg}(\mathcal{B}_\infty) \times SG_d(\mathcal{B}_\infty) \mid H \leq G \text{ et } [H:G] \leq k \}$

On vérifie que B_k est borélien.

On a vu en cours que B_k est à sections finies.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : SG_{d,fg}(\mathcal{B}_\infty) \to SG_d(\mathcal{B}_\infty)$ comme dans le lemme précédent.

Alors $\mathcal{N}_k(G) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} h_n(G)$

$$\mathcal{N}_k(G) = \bigcap \{ H \leq G : [G:H] \leq k \}$$

qui est bien borélien (m̂ preuve que pour g).

12) $[G,G] = \{ g \in \mathcal{B}_\infty \mid \exists l \ \exists n_1, \dots, n_{2l}, \ g = \prod_{i=1}^{l} [f_{n_{2i}}(G), f_{n_{2i+1}}(G)] \}$

donc $[G,G] \cap U \neq \emptyset \iff \exists l, \exists n_1 \dots n_l$

$$\prod_{i=1}^{l} [f_{n_{2i}}(G), f_{2i+1}(G)] \in U$$

donc $\underline{G \mapsto [G,G] \text{ est borélienne}}$.

13) Les questions précédentes assurent que $G \in SG_{d,fg}(G_\infty) \mapsto S_k(G) := [G,G] \cap \mathcal{N}_k(G)$ est borélienne. De plus si on pose $R_n(G) = \langle f_1(G), \dots, f_n(G) \rangle$ on vérifie comme en 12) que R_n est borélienne.

<u>Ceci nous assure que $G \longmapsto T^1(G)$ comme défini en cours est borélien</u> et c'est tout ce dont on a besoin pour mener à bien la preuve de la même façon qu'avec g.