DM1 - à rendre le 28 janvier

Exercice 1. Non trivialité de la hiérarchie aux ordinaux limites.
Soit X un espace polonais non dénombrable et $\xi < \omega_1$ un ordinal limite. Montrer que

$$\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X).$$

Exercice 2. L'espace de Baire est un G_δ de l'espace de Cantor.
Montrer que l'application $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \{0,1\}^\mathbb{N}$ définie par :

$$f((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) = 01^{n_0}01^{n_1}01^{n_2}...$$

est un homémorphisme sur son image (on rappelle que 1^n désigne la suite finie formée de n 1).

Exercice 3. Espace d'applications continues.
Soit (Y, d) un espace métrique complet séparable, et soit X un compact polonais.

1. Montrer que l'espace des applications continues de X dans Y est complet pour la distance $d_\infty(f, g) = \max_{x\in X} d(f(x), g(x))$.
2. Montrer qu'il est également séparable. On pourra commencer par le cas où $X = \{0,1\}^\mathbb{N}$.

Exercice 4. Construction de Cantor-Bendixon et groupes dénombrables.
Soit Γ un groupe dénombrable infini. On considère $\{0,1\}^\Gamma$ muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Cantor et que l'on identifie à l'ensemble des parties de Γ.

1. Soit $\mathcal{SG}_\Gamma$ l'ensemble des sous groupes de Γ. Montrer que $\mathcal{SG}_\Gamma$ est un fermé de $\{0,1\}^\Gamma$.
2. Effectuer la construction de Cantor-Bendixon sur $\mathcal{SG}_\mathbb{Z}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rang de Cantor-Bendixon de $\mathcal{SG}_{\mathbb{Z}^n}$ est égal à $n + 1$.