DM3 - à rendre le 31 mars

Exercice 1. Rang des groupes libres.
Le rang d'un groupe est le nombre minimal d'éléments nécessaires pour l'engendrer. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n$ est de rang n et en déduire que le groupe libre à n générateurs $\mathbb{F}_n$ est de rang n. En particulier $\mathbb{F}_n$ n'est isomorphe à $\mathbb{F}_m$ que pour $n = m$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $a_p = b^p a b^{-p} \in \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$. Montrer que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ engendre un groupe libre de rang infini.

Exercice 2. Sous-ensembles de l'espace des groupes marqués.
Les sous-ensembles suivants de l'espace $\mathcal{G}_\infty$ des groupes marqués sont ils ouverts ? fermés ? Boréliens ?

1. L'ensemble des groupes abéliens.
2. L'ensemble des groupes finis.
3. L'ensemble des groupes résolubles.
4. L'ensemble des groupes moyennables.
5. L'ensemble des groupes isomorphes à un groupe de type fini donné.

Exercice 3. Espace des groupes dénombrables infinis.
On va considérer un autre modèle pour l'espace des groupes dénombrables infinis : on considère l'ensemble Grp des fonctions $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui définissent une loi de groupe sur $\mathbb{N}$ ayant 0 pour élément neutre.

1. Montrer que Grp est un borélien de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
2. On considère une propriété $\mathcal{P}$ des groupes (c'est-à-dire que si G et H sont isomorphes alors $\mathcal{P}(G)$ ssi $\mathcal{P}(H)$). Montrer que $\mathcal{P}$ définit un borélien de Grp ssi $\mathcal{P}$ définit un borélien de $\mathcal{G}_\infty$.