Groupes élémentairement moyennables

François Le Maître

27 mars 2016

On se propose de revenir sur certains points du cours sur les groupes élémentairement moyennables en détail. Rappelons que la classe des groupes élémentairement moyennables $\mathcal{EM}$ est la *plus petite* classe groupes dénombrables contenant le groupe trivial et jouissant des propriétés suivantes.

(i) $\mathcal{EM}$ contient le groupe trivial.

(ii) $\mathcal{EM}$ est stable par extension par un groupe abélien ou fini : si $N \in \mathcal{EM}$ et G est un groupe dénombrable tel que $N \triangleleft G$ et G/N est abélien ou fini, alors $G \in \mathcal{EM}$

(iii) $\mathcal{EM}$ est stable par réunion dénombrable croissante : si $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ où pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $G_i \leqslant G_{i+1}$ et $G_i \in \mathcal{EM}$, alors $G \in \mathcal{EM}$.

On a vu en cours que la classe des groupes moyennables satisfait également les propriétés (i), (ii) et (iii) : les groupes élémentairement moyennables sont donc bien moyennables. Il se trouve que les groupes élémentairement moyennables satisfont essentiellement les mêmes propriétés de stabilité que les groupes moyennables : c'est le contenu du théorème qui suit.

Théorème 1 (Chou)**.** *La classe $\mathcal{EM}$ des groupes élémentairement moyennables jouit des propriétés suivantes :*

(a) $\mathcal{EM}$ contient les groupes finis et les groupes abéliens dénombrable.

(b) $\mathcal{EM}$ est stable par extension : si $N \in \mathcal{EM}$ et G est un groupe dénombrable tel que $N \triangleleft G$ et $G/N \in \mathcal{EM}$ alors $G \in \mathcal{EM}$

(c) $\mathcal{EM}$ est stable par réunion dénombrable croissante : si $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ où pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $G_i \leqslant G_{i+1}$ et $G_i \in \mathcal{EM}$, alors $G \in \mathcal{EM}$.

(d) $\mathcal{EM}$ est stable par passage au sous-groupe : si $G \in \mathcal{EM}$ et $H \leqslant G$ alors $H \in \mathcal{EM}$.

(e) $\mathcal{EM}$ est stable par passage au quotient : si $G \in \mathcal{EM}$ et $N \triangleleft G$ alors $G/N \in \mathcal{EM}$.

Notons que ce théorème nous permet de redéfinir les groupes élémentairement moyennables comme la plus petite classe de groupes dénombrables contenant les groupes abéliens ou finis, stable par extension, réunion dénombrable croissante, passage au quotient ou à un sous-groupe. Il s'agit en fait de la définition originelle des groupes élémentairement moyennables donnée par Day. On a vu la preuve du théorème en cours, elle ne fait appel qu'à des notions de théorie des groupes de base et ressemble fortement aux preuves sur les boréliens que l'on rencontre en théorie de la mesure : étant donné une propriété $\mathcal{P}$ de groupe, si on veut montrer qu'elle est satisfaite par tout groupe élémentairement moyennable, on suit le chemin suivant :

(i) on montre d'abord que le groupe trivial satisfait $\mathcal{P}$

(ii) puis que si N satisfait $\mathcal{P}$ et $N \triangleleft G$ avec G/N abélien ou fini, alors G satisfait $\mathcal{P}$

(iii) et enfin que si un groupe G s'écrit comme réunion dénombrable croissante de groupes satisfaisant $\mathcal{P}$, alors G satisfait $\mathcal{P}$.

Alors la classe des groupes satisfaisant $\mathcal{P}$ contiendra $\mathcal{EM}$ puisque cette dernière est la plus petite classe de groupes vérifiant (i), (ii) et (iii).

1 Un théorème de plongement de Hall-Neumann-Neumann

Voici maintenant une preuve complète du théorème de plongement qui va nous permettre de construire des groupes élémentairement moyennables "arbitrairement compliqués".

Théorème 2. *Soit H un groupe, alors il existe une suite exacte*

$$1 \to M \to G \to \mathbb{Z} \to 1$$

où $[M, M] = \bigoplus_{\mathbb{Z}}[H, H]$ et G est engendré par 2 éléments.

Démonstration. Considérons le produit semi-direct $H^{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}$, où l'on voit $H^{\mathbb{Z}}$ comme le groupe des fonctions $h : \mathbb{Z} \to H$ sur lequel $\mathbb{Z}$ agit par décalage : $(n \cdot h)(i) = h(i - n)$. On identifie $H^{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$ à leurs images naturelles dans ce groupe, et on note t un générateur de $\mathbb{Z}$, par exemple $t = 1$. Notons que par définition du produit semi direct, l'action de t par conjugaison sur $H^{\mathbb{Z}}$ est par décalage : si $h \in H^{\mathbb{Z}}$ alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a $tht^{-1}(i) = h(i - 1)$. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des éléments de H. On définit un élément $\sigma \in H^{\mathbb{Z}}$ par : pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma(i) = \begin{cases} h_n & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } i = 2^n \\ e & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit G le groupe engendré par σ et t, et soit M le groupe engendré par les conjugués de σ par des éléments dans G (autrement dit, M est le groupe distingué engendré par σ). On va montrer que G et M sont comme voulu.

Définissons le **support** de $h \in H^{\mathbb{Z}}$, noté supp $h \subseteq \mathbb{Z}$, par

$$\text{supp } h := \{i \in \mathbb{Z} : h(i) \neq e\}.$$

Ainsi le support de σ est $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $h \in H^{\mathbb{Z}}$, on vérifie aisément que

$$\text{supp } t^n h t^{-n} = n + \text{supp } h.$$

Enfin, si $g, h \in H^{\mathbb{Z}}$, on remarque que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a $[g, h](i) = [g(i), h(i)]$; en particulier le support de leur commutateur est inclus dans supp $g \cap$ supp h.

Puisque M est engendré par les conjugués de σ dans $G = \langle \sigma, t\rangle$, le groupe M est en fait engendré par $\{t^n \sigma t^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$. Étudions les commutateurs de tels éléments afin de montrer que $[M, M] = \bigoplus_{\mathbb{Z}}[H, H]$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$. Le support de $t^n \sigma t^{-n}$ est $n + \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ tandis que celui de $t^m \sigma t^{-m}$ est $m + \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$. Si l'intersection de ces deux ensembles est vide, le commutateur de $t^n \sigma t^{-n}$ avec $t^m \sigma t^{-m}$ est trivial. Au contraire si l'intersection de ces deux ensembles est non vide, l'équation $n + 2^k = m + 2^l$ en $k, l \in \mathbb{N}$ admet au moins une solution. Montrons qu'elle en a au plus une. Comme $n \neq m$ on sait que k et l sont distincts, en on a l'équation $2^k - 2^l = n - m$. Quitte à échanger n et m on peut supposer $k < l$, et l'équation en (k, l) devient alors $2^k(1 - 2^{l-k}) = n - m$ qui admet au plus une solution puisque $1 - 2^{l-k}$ est impair .

En résumé, concernant le commutateur de $t^n \sigma t^{-n}$ avec $t^m \sigma t^{-m}$deux cas se présentent :

— le commutateur est trivial : $[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}] = 1$ ou
— il existe un unique couple $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n+2^k = m+2^l$. Le support de $[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}]$ est alors inclus dans $\{n+2^k\}$, et on a

$$[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}](n+2^k) = [\sigma(2^k), \sigma(2^l)] = [h_k, h_l]. \tag{1}$$

Dans tous les cas, on a donc $[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}]$ de support fini et à valeur dans $[H,H]$, autrement dit le groupe engendré par les commutateurs $[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}]$ est inclus dans $\bigoplus_{\mathbb{Z}}[H,H]$. Ce dernier étant distingué dans G, on en déduit que le groupe distingué (toujours dans G) engendré par les commutateurs $[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}]$ est inclus dans $\bigoplus_{\mathbb{Z}}[H,H]$.

Réciproquement, l'équation (1) montre que pour tout $k \neq l \in \mathbb{N}$, on a

$$[t^{-2^k}\sigma t^{2^k}, t^{-2^l}\sigma t^{2^l}](0) = [h_k, h_l]$$

tandis que $[t^{-2^k}\sigma t^{2^k}, t^{-2^l}\sigma t^{2^l}](i) = e$ pour tout $i \neq 0$. Comme $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une énumération de H, on en déduit que le groupe engendré par les commutateurs $[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}]$ contient $[H,H]$ (que l'on a identifié aux fonctions à valeur dans $[H,H]$ de support inclus dans $\{0\}$). Comme $\bigoplus_{\mathbb{Z}}[H,H]$ est engendré par les conjugués de $[H,H]$ par des puissances de t, on conclut que le groupe distingué engendré par les commutateurs $[t^n\sigma t^{-n}, t^m\sigma t^{-m}]$ contient $\bigoplus_{\mathbb{Z}}[H,H]$ et lui est donc égal d'après le paragraphe précédent. Le fait que $[M,M] = \bigoplus_{\mathbb{Z}}[H,H]$ découle alors du lemme suivant puisque M est engendré par $S := \{t^n\sigma t^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Lemme 3. Soit G un groupe engendré par une partie S. Alors $[G,G]$ est engendré par le groupe distingué engendré par les $[a,b]$ où $a \neq b \in S$.

Démonstration. On laisse au lecteur le soin au lecteur de compléter la preuve en utilisant l'astuce suivante :

$$\begin{aligned}
[ab,c] &= abcb^{-1}a^{-1}c^{-1} \\
&= abcb^{-1}c^{-1}a^{-1}aca^{-1}c^{-1} \\
[ab,c] &= \left(a[b,c]a^{-1}\right)[a,c]
\end{aligned}$$

□

Remarque. On peut donner une preuve plus conceptuelle de ce lemme en utilisant que le quotient par le groupe dérivé est le plus grand quotient abélien de G : dans le quotient de G par le groupe distingué engendré par les commutateurs $[a,b]$ où $a,b \in S$, tous les éléments commutent car toutes les projections des éléments de S commutent, donc le groupe distingué engendré par les $[a,b]$ contient le groupe dérivé.

Reste à voir pourquoi on a une suite exacte $1 \to M \to G \to \mathbb{Z} \to 1$. L'application quotient $\pi : H^{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est surjective en restriction à G puisque ce dernier contient t. Le noyau de cette restriction est de plus inclus dans M car ce dernier est un sous groupe de $H^{\mathbb{Z}}$. Ainsi π induit un morphisme $\tilde{\pi} : G/M \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. Mais M est le sous-groupe distingué engendré par σ dans G et $G = \langle \sigma, t\rangle$, donc G/M est un groupe cyclique engendré par la projection de t. Comme $\tilde{\pi}$ est surjectif, on en déduit que $\tilde{\pi}$ est un isomorphisme de groupes, donc $M = \operatorname{Ker} \pi_{|G}$ et la suite

$$1 \to M \to G \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \to 1$$

est bien exacte. □

2 Choisir un sous-groupe de façon borélienne

Dans le cours, on a vu qu'il y avait une fonction $S_k : \mathcal{G}_{fg} \to \mathcal{G}$ qui à un groupe marqué $(\Gamma, (s_i))$ associe un groupe marqué $(\Lambda, (s'_i))$ tel que Λ est isomorphe à

$$[\Gamma, \Gamma] \cap \mathcal{N}_k(\Gamma),$$

où $\mathcal{N}_k(\Gamma)$ est l'intersection de tous les sous-groupes d'indices $\leqslant k$ de Γ. On va revoir ce résultat d'une manière un peu plus conceptuelle. Commençons par voir que si l'on désigner une partie génératrice d'un sous-groupe d'un groupe marqué de manière borélienne, alors on peut trouver de manière borélienne un groupe marqué qui sera isomorphe à ce sous-groupe.

Lemme 4. Il existe une fonction continue $\Phi : \mathcal{G} \times 2^{\mathbb{F}_\omega} \to \mathcal{G}$ telle que pour tous $S \subseteq \mathbb{F}_\omega$ et tout $N \in \mathcal{G}$, le groupe engendré par $\pi_N(S)$ dans $\mathbb{F}_\omega/N$ est isomorphe à $\mathbb{F}_\omega/\Phi(S, N)$.

Démonstration. On commence par définir une suite de fonctions continues $f_n : 2^{\mathbb{F}_\omega} \to \mathbb{F}_\omega$ qui vont nous permettre d'énumérer les ensembles de générateurs $S \subseteq \mathbb{F}_\omega$. Fixons une énumération $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{F}_\omega$. Alors pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et $S \in 2^{\mathbb{F}_\omega}$ on pose

$$f_i(S) = \begin{cases} w_i & \text{si } w_i \in S \\ e & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que par construction pour tout $S \in \mathbb{F}_\omega$, on a $S \cup \{e\} = \{f_i(S) : i \in \mathbb{N}\}$.

On définit alors notre application $\Phi : \mathcal{G} \times 2^{\mathbb{F}_\omega} \to \mathcal{G}$ par : $\Phi(S, N)$ est le noyau de l'unique morphisme $\pi_{N,S} : \mathbb{F}_\omega \twoheadrightarrow \pi_N(\langle S \rangle)$ satisfaisant pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\pi_{N,S}(a_i) = \pi_N(f_i(S)).$$

Il est clair que $\mathbb{F}_\omega/F(N, S)$ est isomorphe à $\pi_n(\langle S \rangle) = \langle \pi_N(S) \rangle$. Reste donc à voir que Φ ainsi définie est continue : soit $w = \prod_{i=1}^n a_i^{\epsilon_i}$ un élément de $\mathbb{F}_\omega$, il suffit de voir que la condition $w \in \operatorname{Ker} \pi_{N,S}$ définit un sous-ensemble ouvert-fermé de $2^{\mathbb{F}_\omega} \times \mathcal{G}$. Mais par définition, $\pi_{N,S}(w) = e$ ssi $\prod_{i=1}^n f_i(S)^{\epsilon_i} \in N$, ce qui est bien une condition ouverte-fermée en (S, N). □

Rappelons que $SG(\mathbb{F}_\omega)$ est l'espace des sous-groupes de $\mathbb{F}_\omega$ et qu'il est compact polonais.

Définition 5. On définit l'espace des sous-groupes de groupes marqués, noté $SG(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G} \times SG(\mathbb{F}_\omega)$, comme l'ensemble des couples $(N, \Lambda) \in \mathcal{G} \times SG(\mathbb{F}_\omega)$ tels que $N \leqslant \Lambda$.

L'espace des sous-groupes de groupes marqués est un fermé de $\mathcal{G} \times SG(\mathbb{F}_\omega)$, il est donc compact polonais. Si $N \in \mathcal{G}$, on sait que π_N^{-1} induit une bijection naturelle entre l'espace des sous groupes de $\mathbb{F}_\omega/N$ et l'espace des sous-groupes de $\mathbb{F}_\omega$ contenant N. Ainsi pour tout $N \in \mathcal{G}$, la fibre verticale de N dans $SG(\mathcal{G})$ s'identifie à l'ensemble des sous-groupes de N, d'où le nom.

On peut ainsi identifier $SG(\mathcal{G})$ avec l'ensemble des couples (N, Λ) où Λ est un sous groupe de $\mathbb{F}_\omega/N$. Remarquons que cette identification est compatible avec les intersections : si Λ et Γ sont deux sous-groupes de $\mathbb{F}_\omega/N$ correspondant aux sous-groupes $\pi_N^{-1}(\Lambda)$ et $\pi_N^{-1}(\Gamma)$ de $\mathbb{F}_\omega$, alors leur intersection $\Lambda \cap \Gamma$ correspond au sous-groupe $\pi_N^{-1}(\Gamma \cap \Lambda)$ de $\mathbb{F}_\omega$. Dans ce qui suit, on se tiendra à la définition formelle de l'espace des sous-groupes de groupes marqués afin de ne pas créer de confusion. Le lemme qui suit nous dit que l'on peut marquer de manière continue les sous-groupes.

Proposition 6. Il existe une fonction continue $\Phi : SG(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ telle que que pour tout $(N, \Lambda) \in SG(\mathcal{G})$ le groupe Λ/N est isomorphe à $\mathbb{F}_\omega/\Phi(N, \Lambda)$.

Démonstration. Si Λ est un sous-groupe de $\mathbb{F}_\omega$ contenant N, alors $\pi_N(\Lambda) = \Lambda/N$. La conclusion suit directement du lemme 4 en restreignant la fonction Φ à $SG(\mathcal{G})$. $\square$

Rappelons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a défini $\mathcal{G}_n = \{N \in \mathcal{G} : \forall i \geqslant n, a_i \in N\}$ où (a_i) est la base canonique de $\mathbb{F}_\omega$. Soit $\mathcal{H}_n = \{N \triangleleft \mathbb{F}_n\}$, alors la projection naturelle $\pi_n : \mathbb{F}_\omega \to \mathbb{F}_n$ induit un homéomorphisme $\pi_n^{-1} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{G}_n$.

On a également défini $\mathcal{G}_{fg} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$, alors chaque groupe de Γ type fini possède un marquage $(s_i)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(\Gamma, (s_i)) \in \mathcal{G}_{fg}$ et on peut donc penser à $\mathcal{G}_{fg}$ comme l'espace des groupes de types finis munis d'un système de générateur fini.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{G}_{fg}$ est un K_σ dans $\mathcal{G}$ et n'est pas fermé (exercice). En fait, on peut le munir de la topologie limite inductive donnée par les inclusions $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$, alors $\mathcal{G}_{fg}$ devient un espace localement compact polonais avec la même structure borélienne que précédemment. Les $\mathcal{G}_n$ sont alors ouverts-fermés.

Si G est un groupe $k \in \mathbb{N}$, on a défini $\mathcal{N}_k(G)$ comme l'intersection de tous les sous-groupes de G d'indice au plus k. C'est un sous-groupe distingué de G, et on a vu que si G est de type fini alors l'ensemble des sous-groupes de G d'indice au plus k est fini, donc $\mathcal{N}_k(G)$ est d'indice fini. La proposition suivante nous dit essentiellement que l'opération $\Gamma \mapsto [\Gamma, \Gamma] \cap \mathcal{N}_k(\Gamma)$ est borélienne.

Proposition 7. L'application $\tilde{S}_k : \mathcal{G}_{fg} \to SG(\mathcal{G})$ définie par pour tout $N \in \mathcal{G}_{fg}$,

$$\tilde{S}_k(N) = \left(N, \pi_N^{-1}\left([\mathbb{F}_\omega/N, \mathbb{F}_\omega/N] \cap \mathcal{N}_k(\mathbb{F}_\omega/N)\right)\right)$$

est borélienne.

Démonstration. Il suffit de montrer pour chaque entier n la restriction $\tilde{S}_{k,n}$ de $\tilde{S}_k$ à $\mathcal{G}_n$ est borélienne. On note $\pi_n : \mathbb{F}_\omega \to \mathbb{F}_n$ la projection naturelle. Comme $\mathbb{F}_n$ est de type fini, il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes d'indice $\leqslant k$. Notons ces sous-groupes $\bar{\Lambda}_1, ..., \bar{\Lambda}_l$, et pour $i = 1, ..., l$ soit $\Lambda_i = \pi_n^{-1}(\bar{\Lambda}_i) \leqslant \mathbb{F}_\omega$.

L'application π_N^{-1} induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{F}_\omega/N$ d'indice au plus k et l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{F}_\omega$ contenant N d'indice au plus k. Ainsi

$$\pi_N^{-1}(\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_\omega/N)) = \bigcap \{\Lambda_i : N \leqslant \Lambda_i \text{ et } i \in \{1, ..., l\}\},$$

et donc $N \mapsto \pi_N^{-1}(\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_\omega/N))$ est borélienne. De plus pour tout $N \in \mathcal{G}$, on a

$$\pi_N^{-1}([\mathbb{F}_\omega/N, \mathbb{F}_\omega/N]) = [\mathbb{F}_\omega, \mathbb{F}_\omega]N,$$

et la fonction $N \mapsto [\mathbb{F}_\omega, \mathbb{F}_\omega]N$ est borélienne. Comme

$$\tilde{S}_{k,n}(N) = \left(N, \pi_N^{-1}([\mathbb{F}_\omega/N, \mathbb{F}_\omega/N]) \cap \pi_N^{-1}(\mathcal{N}_k(\mathbb{F}_\omega/N))\right),$$

on conclut que $\tilde{S}_{k,n}$ est borélienne, comme voulu. $\square$

Nous avons désormais tous les outils pour prouver qu'il existe une fonction $S_k : \mathcal{G}_{fg} \to \mathcal{G}$ borélienne qui à un groupe marqué $(\Gamma, (s_i))$ associe un groupe marqué $(\Lambda, (s'_i))$ tel que Λ est isomorphe à

$$[\Gamma, \Gamma] \cap \mathcal{N}_k(\Gamma).$$

Il suffit en effet de poser $S_k(N) = \Phi(\tilde{S}_k(N))$ où Φ est fournie par la proposition 6 tandis que $\tilde{S}_k$ provient de la proposition précédente.