TD2 - Espaces de Baire, espace de Cantor

Exercice 1. Espaces de Cantor triadiques.
Etant donné $\lambda \in]0, 1/2[$ et $a < b \in \mathbb{R}$, on associe à l'intervalle fermé $[a, b]$ deux intervalles

$$C_{0,\lambda}([a, b]) = [a + \lambda(b - a)] \text{ et } C_{1,\lambda}([a, b]) = [b - \lambda(b - a), b].$$

1. On construit par récurrence un schéma d'intervalles $(F_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ sur $[0, 1]$ en posant $F_\emptyset = [0, 1]$ puis pour tout $s \in 2^{<\mathbb{N}}$,

$$F_{s0} = C_{0,1/3}(F_s) = [a + \lambda(b - a)] \text{ et } F_{s1} = C_{1,1/3}(F_s).$$

   Montrer qu'on a bien un schéma de Cantor. L'image de l'application associée $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ est ce qu'on appelle l'espace triadique de Cantor.
2. Montrer que l'espace triadique de Cantor est fermé d'intérieur vide, et de mesure de Lebesgue nulle.
3. En faisant varier λ en fonction de $|s|$ dans la construction ci-dessus, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une copie de l'espace de Cantor dans $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue plus grande que $1 - \epsilon$.
4. Montrer que $[0, 1]$ contient un sous-ensemble maigre de mesure de Lebesgue 1.

Exercice 2. Courbe de Peano.
En utilisant un espace de Cantor triadique, montrer que $[0, 1]$ se surjecte continûment sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Espace d'applications continues.
Soit (Y, d) un espace métrique complet séparable, et soit X un compact polonais.

1. Montrer que l'espace des applications continues de X dans Y est complet pour la distance $d_\infty(f, g) = \max_{x\in X} d(f(x), g(x))$.
2. Montrer qu'il est également séparable. On pourra commencer par le cas où $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4. L'espace de Baire est un G_δ de l'espace de Cantor.
Montrer que l'application $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$f((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) = 01^{n_0}01^{n_1}01^{n_2}...$$

est un homémorphisme sur son image (on rappelle que 1^n désigne la suite finie formée de n 1).

Exercice 5. Points de condensation.
Soit X un espace polonais, alors $x \in X$ est appelé un **point de condensation** si tous les voisinages de x sont non dénombrables. Montrer que l'ensemble des points de condensation de X est fermé, puis qu'en fait le coeur parfait de X est l'ensemble de ses points de condensation.

Exercice 6. Construction de Cantor-Bendixon et groupes dénombrables.
Soit Γ un groupe dénombrable infini. On considère $\{0, 1\}^\Gamma$ muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Cantor et que l'on identifie à l'ensemble des parties de Γ.

1. Soit $\mathcal{SG}_\Gamma$ l'ensemble des sous groupes de Γ. Montrer que $\mathcal{SG}_\Gamma$ est un fermé de $\{0, 1\}^\Gamma$.
2. Effectuer la construction de Cantor-Bendixon sur $\mathcal{SG}_\mathbb{Z}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rang de Cantor-Bendixon de $\mathcal{SG}_{\mathbb{Z}^n}$ est égal à $n + 1$.

Exercice 7. Un peu de théorie des modèles.
Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie complète. On dit que T est **petite** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace de ses n-types $S_n(T)$ est dénombrable.
On dit que T admet un **arbre de formules consistantes** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un schéma de formules $(\varphi_s(\bar{x}))_{s\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ en n variables tel que $\forall s \in 2^{<\mathbb{N}}$

(1) $T \vdash \exists \bar{x} \varphi_s(\bar{x})$

(2) $T \vdash \forall \bar{x} \neg(\varphi_{s0}(\bar{x}) \wedge \varphi_{s1}(\bar{x}))$

(3) $T \vdash \forall \bar{x}\, ((\varphi_{s0}(\bar{x}) \to \varphi_s(\bar{x})) \wedge ((\varphi_{s1}(\bar{x}) \to \varphi_s(\bar{x}))$

1. Montrer que $S_n(T)$ est un fermé de l'espace de Cantor.
2. Montrer que T admet un arbre de formules ssi T n'est pas petite.
3. Montrer que si T est petite alors l'ensemble des types isolés est dense dans $S_n(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.