TD3 - Hiérarchie borélienne

Exercice 1. Paramétrages X-universels.
Soit X un espace polonais non dénombrable, montrer qu'il existe un X-paramétrage universel de $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$.

Exercice 2. Non trivialité de la hiérarchie aux ordinaux limites.
Soit X un espace polonais non dénombrable et $\xi < \omega_1$ un ordinal limite. Montrer que

$$\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X).$$

Exercice 3. Calculs de complexité [1]

1. Montrer que l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ est un $\mathbf{\Pi}^0_3(\mathbb{N}^\mathbb{N})$.
2. Un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est dit de densité nulle si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|A \cap \{0, ..., n-1\}|}{n} = 0.$$
Montrer que l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de densité nulle est un $\mathbf{\Pi}^0_3(2^\mathbb{N})$.

Exercice 4. Réduction continue.
On définit la relation $\leqslant_c$ sur les sous-ensembles d'espaces polonais par : pour X et Y polonais, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, $(A, X) \leqslant_c (B, Y)$ si il existe une fonction continue $f : X \to Y$ telle que $A = f^{-1}(B)$. On note en fait souvent $A \leqslant_c B$ puisque les espaces X et Y sous-jacents sont souvent clairs.

1. Montrer que $\leqslant_c$ c est un préordre (c'est-à-dire qu'elle est réflexive et transitive) et qu'elle n'est pas totale.
2. Soit X un espace polonais et $U \subseteq X$, donner une condition nécessaire et suffisante sur U pour que $(U, X) \leqslant_c (\{0\}, \{0, 1\})$.

Soit Γ une classe de sous ensembles et X un espace polonais, on dit qu'une partie $U \in \mathbf{\Gamma}(X)$ est **$\mathbf{\Gamma}$-complète** si pour tout espace polonais zéro-dimensionnel Y et tout $V \in \mathbf{\Gamma}(Y)$, on a $(V, Y) \leqslant_c (U, X)$.

3. Donner un exemple d'ensemble $\mathbf{\Delta}^0_1$-complet.
4. Soit X polonais. Montrer que si $A \subseteq X$ est $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-complet alors A n'est pas $\mathbf{\Pi}^0_\xi$.
5. On considère $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie
$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{A \cup \{\infty\} : A \subseteq \mathbb{N} \text{ est cofinie}\}.$$
Montrer que $\bar{\mathbb{N}}$ est un espace polonais compact, le réaliser comme compact de $\mathbb{R}$ (on sait que c'est possible d'après le TD1, exercice 9 !) puis montrer que $(\mathbb{N}, \bar{\mathbb{N}})$ est $\mathbf{\Sigma}^0_1$-complet.
6. Soit X un espace polonais, montrer qu'un ouvert $U \subseteq X$ est $\mathbf{\Sigma}^0_1$-complet ssi il n'est pas fermé.
7. Montrer que $(\mathbb{N}^\mathbb{N}, \bar{\mathbb{N}}^\mathbb{N})$ est $\mathbf{\Pi}^0_2$-complet.
8. On considère le sous ensemble A de $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ formé des suites qui ne prennent qu'un nombre fini de fois la valeur 0. Montrer que $(A, \{0, 1\}^\mathbb{N})$ est $\mathbf{\Sigma}^0_2$-complet.
9. Construire un sous-ensemble de $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ qui soit $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet, puis montrer que les deux ensembles vus à l'exercice précédent sont $\mathbf{\Pi}^0_3$-complets.
10. Montrer que pour tout $1 \leqslant \xi < \omega_1$, il existe un sous-ensemble de $2^\mathbb{N}$ qui est $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-complet.

1. Pour beaucoup plus d'exemples (et des indications pour l'exercice suivant !), cf. [Kec95, chap. 23].

Un des théorèmes fondamentaux sur la réduction continue est le lemme de Wadge, qui dit que si X, Y sont polonais zéro-dimensionnels et $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sont boréliens, alors soit $A \leqslant_c B$ soit $A \leqslant_c (Y \setminus B)$. C'est une conséquence du théorème de détermination borélienne, que nous évoquerons mais ne démontrerons pas. La conséquence principale de ce lemme est que si X est un espace polonais zéro-dimensionnel et $A \subseteq X$ est $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ mais pas $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, alors A est $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-complet (exercice !).

Indications

- Exercice 1 : Utiliser que X contient l'espace de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ comme fermé. Attention, un $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ de $2^{\mathbb{N}}$ n'est pas forcément $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ vu comme sous-ensemble de X.
- Exercice 3 : On utilise la manière usuelle de montrer qu'un ensemble est borélien en interprétant des $\forall n$ comme intersections dénombrables, et des $\exists n$ comme réunion dénombrable. Un exemple plus difficile d'ensemble $\mathbf{\Pi}^0_3$ est celui des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (cf. [Kec95, 11.B]).
- Exercice 4 :
  - Pour la question 5, utiliser que tout polonais zéro dimensionnel X est un fermé de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Étant donné un ouvert O de X, on pourra construire une réduction continue en considérant pour $x \in O$ considérer le plus grand entier n tel que $N_{x_{\restriction n}} \cap X \subseteq O$.
  - Une remarque utile à faire est que si U est $\mathbf{\Gamma}$-complet, $V \in \Gamma(Y)$ et $U \leqslant_c V$, alors V est Γ-complet.
  - Une autre remarque utile est que $U \subseteq X$ est $\mathbf{\Gamma}$-complet ssi $X \setminus U$ est $\check{\mathbf{\Gamma}}$-complet.
  - Pour la question 7, il faut se rappeler qu'une intersection dénombrable se plonge naturellement dans un produit dénombrable (cf. par exemple la preuve qu'un G_δ est polonais).

Références

[Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.