TD4 - Ensembles analytiques

Exercice 1. Stabilité des ensembles analytiques.
Montrer les propriétés suivantes de stabilité des ensembles analytiques (l'ordre donné permet de ne pas boucler !)

— image directe borélienne (si $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ et $f : X \to Y$ est borélienne alors $f(A) \in \mathbf{\Sigma}^1_1(Y)$),
— intersection dénombrable (si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$),
— réunion dénombrable (si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$) et
— préimage borélienne (si $B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(Y)$ et $f : X \to Y$ est borélienne alors $f^{-1}(B) \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$).

Montrer qu'une seule de ces quatres propriétés n'est pas vraie des ensembles coanalytiques (on donnera un contre-exemple et montrera que les trois autres sont vraies).

Exercice 2. Exemples d'ensembles analytiques.
Montrer que les ensembles suivants sont analytiques (on rappellera le borélien standard dont ce sont des sous-ensembles).

— L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ dérivables quelque part, c'est-à-dire des f telles qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ avec f dérivable en x_0.
— L'ensemble des suites de réels qui admettent une sous-suite convergente.
— L'ensemble des compacts de $[0, 1]$ qui contiennent un irrationnel.

Exercice 3. Retour sur les boréliens.
On note parfois l'ensemble des boréliens $\mathbf{\Delta}^1_1$, pourquoi ? Soit X un espace polonais. Montrer qu'il n'y a pas de X-paramétrage universel de $\mathbf{\Delta}^1_1(X)$.

Exercice 4. Ensemble des bons ordres sur $\mathbb{N}$.
On rappelle qu'un ordre sur $\mathbb{N}$ est bon si tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Cela revient à dire qu'on a un ordre total bien fondé.

1. Montrer que l'ensemble des ordres sur $\mathbb{N}$ est un fermé du compact métrisable $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'ensemble WO (well-order) des bons ordres sur $\mathbb{N}$ est coanalytique.
3. Étant donné un arbre T sur $\mathbb{N}$, on définit l'ordre de Kleene-Brouwer sur l'arbre T par : pour $s, t \in T$, on pose $s <_{KB} t$ si s est un fils de t (ce que l'on a noté $s \supsetneq t$ ou $s \prec t$ dans le cours) ou si $s_i < t_i$ où i est le premier entier tel que $s_i \neq t_i$ (on a donc essentiellement l'ordre lexicographique avec par exemple $000 <_{KB} 01$, sauf que 01 est plus petit que 0 !). Montrer que T est bien fondé si et seulement si $(T, <_{KB})$ est bien ordonnée.
4. En déduire que l'ensemble WO est $\mathbf{\Pi}^1_1$-complet.