TD5 - Ensembles Baire-mesurables

Exercice 1. Ensembles de queue.
On se propose de généraliser le fait que les ensembles Baire mesurables E_0-invariants sont maigres ou comaigres.
Soit (X_n) une famille dénombrable d'espaces polonais. On dit que $A \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un *ensemble de queue* si pour tout $(x_n) \in A$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $(y_0, ..., y_k) \in \prod_{n=0}^{k} X_n$, on a également $(y_0, ..., y_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ...) \in A$. Montrer que tout ensemble de queue Baire-mesurable est soit maigre soit comaigre.

Exercice 2. Loi du 0-1 topologique.
Soit G un groupe d'homéomorphismes d'un espace de Baire X à base dénombrable d'ouverts.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) G est topologiquement transitif : pour tous ouverts non vides U et V de X il existe $g \in G$ tel que $gU \cap V$ est non vide.
   (b) Il existe $x \in X$ dont la G-orbite est dense.
   (c) L'ensemble des $x \in X$ dont la G-orbite est dense est comaigre.
2. On suppose que $G \curvearrowright X$ est topologiquement transitive, soit $A \subseteq X$ Baire mesurable. Montrer que si A est G-invariant [1] alors A est soit maigre, soit comaigre.

Exercice 3. Espaces de Baire.

1. Montrer que les espaces compacts sont des espaces de Baire.
2. Montrer que les espaces localement compacts [2] sont de Baire.

Exercice 4. Espaces complètement de Baire.
Un espace topologique est *complètement de Baire* si tous ses fermés dont des espaces de Baire.

1. Donner un exemple d'espace de Baire qui ne soit pas complètement de Baire. On pourra chercher un exemple parmi les sous-ensembles de $[0, 1] \times [0, 1]$.
2. Montrer que les espaces localement compacts et les espaces polonais sont complètement de Baire.
3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble de Bernstein [3]. Montrer que A est complètement de Baire, bien que A ne soit pas polonais ni localement compact.

1. C'est-à-dire que $gA = A$ pour tout $g \in G$.
2. Un espace topologique est localement compact s'il dispose d'une base d'ouverts d'adhérence compacte.
3. On rappelle que par définition, A ainsi que son complémentaire intersectent tous les sous-ensembles fermés parfaits non vide de $\mathbb{R}$.

Indications

- Exercice 3, 1 : utiliser le fait que dans un compact, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante de fermés non vide, alors son intersection est non vide.
- Exercice 4, 1 : considérer l'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q} \times \{0\} \cup]0,1[\times]0,1[$.
- Exercice 4, 2 : Commencer par établir le fait que A et son complémentaire sont denses dans $\mathbb{R}$.