Corrigé du DM2

François Le Maître - *f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr*

Exercice 1. Corps ordonnés non standards.
On considère le langage $\mathcal{L}_{ao} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ où $0, 1$ sont des constantes, $+, \cdot$ sont des fonctions binaires et $<$ est une relation binaire. On voit naturellement $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ comme des $\mathcal{L}_{ao}$-structures.

1. $\mathbb{Z}$ est-il une sous-structure élémentaire de $\mathbb{Q}$?

Non, même en tant que groupe : en effet tout élément n'est pas divisible par 2 dans $\mathbb{Z}$, contrairement à $\mathbb{Q}$. L'énoncé $\forall y \exists x, y = x + x$ est donc vrai dans $\mathbb{Q}$ mais faux dans $\mathbb{Z}$, qui n'est donc pas une sous-structure élémentaire de $\mathbb{Q}$.

2. Soit T_c la théorie des corps, donner un $\mathcal{L}_{ao}$-énoncé φ tel que l'ensemble des modèles de $T_c \cup \{\varphi\}$ soit l'ensemble des corps totalement ordonnés.

Il suffit de considérer pour φ la conjonction des énoncés suivants :
- $(\forall x \neg x < x) \wedge \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$ *($<$ est un ordre strict)*
- $(\forall x \forall y, \neg x = y \to x < y \wedge y < x)$ *($<$ est total)*
- $\forall x \forall y (0 < x \wedge 0 < y) \to 0 < xy$ *(le produit préserve la positivité)*
- $\forall x \forall y \forall z, x < y \to x + z < y + z$ *(l'addition préserve l'ordre)*

3. $\mathbb{Q}$ est-il une sous-structure élémentaire de $\mathbb{R}$?

Non, même en tant que corps puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc $\exists x, xx = 1 + 1$ est vraie dans $\mathbb{R}$ mais fausse dans $\mathbb{Q}$.

4. *Il y avait une erreur dans l'énoncé initial, voici l'énoncé corrigé.* Montrer qu'il existe un corps ordonné $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $\bar{\mathbb{R}}$ contienne $\mathbb{R}$ comme sous-corps ordonné, mais $\bar{\mathbb{R}}$ ne soit pas archimédien et $\mathbb{R} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ soit borné (i.e. contenu dans un intervalle).

Le théorème de Łoś nous garantit que $\mathbb{R}$ est une sous-structure (élémentaire) de $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$ via $\varphi : x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$ où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. En particulier, $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$ a la même théorie que $\mathbb{R}$ est c'est donc un corps totalement ordonné d'après la question 2. De plus il n'est pas archimédien puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $k[(1/n)_{n \in \mathbb{N}}] < 1$ (en effet $\{n \in \mathbb{N} : k/n < 1\}$ est cofini). De même si $x \in \mathbb{R}$ on a $\{n \in \mathbb{N} : x < n\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : -n < x\}$ sont cofinis donc $(-n)_{n \in \mathbb{N}} < \varphi(x) < (n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2. Graphe aléatoire.
Il y avait une erreur dans l'énoncé, il faut que les graphes soient non vides, sinon la consistance de T_{gal} ne nous apprend pas grand chose puisque l'ensemble vide en est un modèle évident. Soit le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation binaire. On définit un **graphe** comme une $\mathcal{L}$-structure *non vide* où l'interprétation de R est symétrique et irréflexive.

1. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé dont les modèles sont les graphes.

L'énoncé $\varphi = \exists x\ x = x \wedge \forall x\ \neg xRx \wedge \forall x \forall y\ xRy \to yRx$ convient.

2. On dit qu'un graphe G satisfait la **propriété d'extension** si pour tous $E, F \subseteq G$ finis disjoints, il existe $x \in G$ tel que pour tous $y \in E$ et tous $z \in F$, on ait xRy et $x \not R z$. Donner une théorie T_{gal} dont les modèles forment l'ensemble des graphes avec la propriété d'extension.

Pour n et $m \in \mathbb{N}$ on considère l'énoncé

$$\psi_{n,m} = \forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_m \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m} x_i \neq y_j) \right) \to \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} zRx_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \neg zRy_j$$

Alors $T_{gal} = \{\varphi\} \cup \{\psi_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ convient.

3. On admet que T_{gal} est consistante (cf. question 7). Montrer que T_{gal} a un modèle dénombrable.

Soit G un modèle de T_{gal}, alors G est non vide. Si G était fini, d'après la propriété d'extension on pourrait trouver un sommet $v \in G$ relié à tous les éléments de G, mais comme R est irréflexive, on aurait $v \notin G$, contradiction. Ceci nous garantit que G est infini, donc T_{gal} admet des modèles infinis. Comme le langage est fini, le théorème de Löwenheim-Skolem nous garantit alors que T_{gal} a un modèle dénombrable.

4. Montrer que si H est un graphe dénombrable et G est un modèle de T_{gal}, alors H se plonge dans G.

On commence par montrer que tout isomorphisme partiel (isomorphisme entre sous-structures finies) se prolonge.

Lemme. Soit G un graphe avec la propriété d'extension et H un graphe. Soit f un isomorphisme partiel de H dans G, et $x \notin \text{dom } f$. Alors f se prolonge en un isomorphisme partiel de domaine $\text{dom } f \cup \{x\}$.

Démonstration. Considérons les ensembles finis $E = \{y \in \text{dom } f : \neg x R_H y\}$ et $F = \{y \in \text{dom } f : \neg x R_H y\}$. En appliquant la propriété d'extension à leurs images par f, on obtient $y \in G$ tel que si l'on étend f en posant $f(x) = y$, alors f reste un isomorphisme partiel par définition. □

On énumère alors $H = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on construit le plongement f par récurrence en posant $f(h_0) = g$ où $g \in G$ est arbitraire, puis en utilisant le lemme appliqué à la restriction de f à $\{h_0, ..., h_n\}$ pour définir $f(h_{n+1})$. Comme une réunion croissante de plongements est un plongement et comme $\text{dom } f = H$ *par construction, on a bien plongé H dans G.*

5. Montrer que tous les modèles dénombrables de T_{gal} sont isomorphes. L'unique modèle de T_{gal} à isomorphisme près s'appelle le *graphe aléatoire*.

On fait la preuve par va-et-vient. Soient $G = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $H = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux modèles dénombrables de T_{gal}. On construit par récurrence un isomorphisme partiel φ_n tel que $\text{dom } \varphi_n$ *contienne $\{a_0, ..., a_n\}$ et* $\text{img } \varphi_n$ *contienne $\{b_0, ..., b_n\}$. On commence par envoyer a_0 sur b_0 puis, φ_n étant construit, on effectue les deux étapes suivantes.*

- *(va) Si $a_{n+1} \in$* $\text{dom } \varphi_n$*, on ne fait rien (on pose $\psi_n = \varphi_n$), et sinon on applique le lemme de la question précédente pour obtenir un isomorphisme partiel ψ_n dont le domaine contient $\{a_0, ..., a_n, a_{n+1}\}$ et l'image contient $\{b_0, ..., b_n\}$.*
- *(vient) Si $b_{n+1} \in$* $\text{img } \psi_n$ *on pose $\varphi_{n+1} = \psi_n$, et sinon on applique le lemme précédent à ψ_n^{-1} pour obtenir un isomorphisme partiel φ_{n+1}^{-1} dont le domaine contient $\{a_0, ..., a_n, a_{n+1}\}$ et l'image contient $\{b_0, ..., b_n, b_{n+1}\}$.*

La réunion des φ_n est alors un isomorphisme entre G et H, ce qui répond à la question.

6. En déduire que T_{gal} est complète.

On vient de montrer que T_{gal} est $\aleph_0$-catégorique, ce qui implique qu'elle est complète. Plus précisément, si G et H sont deux modèles de T_{gal}, comme ils sont infinis on trouve par le théorème de Löwenheim-Skolem des modèles dénombrables G' et H' de $Th(G)$ et $Th(H)$ respectivement. Or G' et H' sont isomorphes d'après la question précédente, en particulier $Th(G') = Th(H')$ donc $Th(G) = Th(H)$. Tous les modèles de T_{gal} ayant la même théorie, on conclut que T_{gal} est complète.