TD3 - Indications de corrigé

François Le Maître - *f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr*

Exercice 1. Preuve du lemme de Zorn.
On se propose de prouver le lemme de Zorn à partir de l'axiome du choix. On va montrer une version plus forte du lemme de Zorn que voici.
Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné admet un majorant. Alors X admet un élément maximal.

1. Tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné, donc si tout sous-ensemble totalement ordonné a un majorant alors en particulier tout ensemble bien ordonné à un majorant. Ainsi le lemme de Zorn usuel est conséquence de cette version.
2. Par hypothèse tout $Y \in \mathcal{C}$ a un majorant, et comme ce dernier n'est pas maximal on peut en fait trouver un majorant strict. Soit $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ une fonction de choix, il suffit de poser $g(Y) = f(\{x \in X : \forall y \in Y, y < x\})$.
3. (a) Soit I la réunion des parties qui sont à la fois des segments initiaux de Y_1 et de Y_2, alors I est toujours un segment initial de Y_1 et de Y_2. On va montrer que $I = Y_1$ ou $I = Y_2$. En effet, supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire $I \subsetneq Y_1$ et $I \subsetneq Y_2$. Comme Y_1 est bien ordonné, $Y_1 \setminus I$ admet un plus petit élément m_1, et comme I est un segment initial de Y_1, on a $I = \{x \in Y_1 : x < m_1\}$ (l'inclusion de droite à gauche est claire, pour l'inclusion réciproque si $x \in I$ mais $x \geqslant m_1$ alors $m_1 \in I$ car I segment initial, contradiction). Ainsi $m_1 = g(I)$. De même si on note m_2 le minimum de $Y_2 \setminus I$ alors $m_2 = g(I)$. Mais alors $m_1 = m_2 \in Y_1 \cap Y_2$ donc $I \cup \{m_1\}$ est un segment initial de Y_1 et de Y_2 contenant strictement I, contradiction.

   (b) Montrons d'abord que la réunion de g-chaînes est bien ordonnée. Si (Y_i) est une famille de g-chaînes, soit A un sous-ensemble non vide de $\bigcup_{i \in I} Y_i$. Il existe $i \in I$ tel que $A \cap Y_i$ est non vide, et alors le minimum m de $A \cap Y_i$ est un minimum de A dans $\bigcup_{i \in I} Y_i$: en effet si $y \in Y_j \cap A$,
   — soit Y_j est un segment initial de Y_i auquel cas $Y_j \subseteq Y_i$ et donc $m \leqslant y$,
   — soit Y_i est un segment initial de Y_j auquel cas comme Y_j est bien ordonné on peut comparer m et y et si $m > y$ on aurait $y \in Y_i$ (car Y_i segment initial), contradiction donc $m \leqslant y$ également.

   Soit maintenant $x \in \bigcup Y_i$, il existe i tel que $x \in Y_i$ et alors on vérifie que la question précédente implique que $\{y \in X : y < x\} \subseteq Y_i$, et donc $x = g(\{y \in X : y < x\})$ car Y_i est une g-chaîne. On en conclut que $\bigcup Y_i$ est une g-chaîne.

   (c) On a donc montré que l'ensemble des g-chaînes a un plus grand élément, notons le Y. Mais Y doit avoir un majorant strict, et alors $Y \cup \{g(Y)\}$ est également une g-chaîne, contradiction. Ainsi X doit avoir un élément maximal, ce qui conclut la preuve.

Exercice 6. Choix dépendant et arbres infinis.
On appelle axiome du choix dépendant l'énoncé suivant : pour toute relation R sur un ensemble X telle que pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ avec $(x, y) \in R$, alors pour tout $x_0 \in X$ on peut trouver une suite (y_n) telle que $y_0 = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(y_n, y_{n+1}) \in R$.

1. Soit f une fonction de choix sur X. On définit alors la suite (y_n) par récurrence en posant $y_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(\{y \in X : (y_n, y) \in R\})$. *La définition d'une fonction par récurrence est permise par les axiomes de la théorie des ensembles, mais a priori seulement quand y_{n+1} est définie de manière non ambigüe à partir de y_n. Ici, notre fonction de choix nous permet précisément de définir y_{n+1} sans ambiguité.*

2. Soit (X_n) une famille dénombrable d'ensembles non vides. On considère leur réunion disjointe $X := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} \times X_n$ et on pose $((n,x),(m,y)) \in R$ ssi $m = n+1$. On a une projection naturelle $\pi : X \to \bigcup X_n$. On fixe $x_0 \in X_0 \times \{0\}$ et alors on peut appliquer le choix dépendant qui nous donne une suite (y_n) avec $(y_n, y_{n+1}) \in R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y_0 = x_0$. On pose alors $x_n = \pi(y_n)$ qui témoigne de la non vacuité du produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
3. Soit A un ensemble. Un arbre sur A est un ensemble de mots sur A stable par préfixe (les sommets). Un arbre T sur A est équeuté si pour tout $s \in T$ il existe $t \in T$ tel que s est un préfixe strict de t. Une branche de T est une suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, ..., a_n) \in T$.
   (a) On pose sRt si s est un préfixe strict de t, et $x_0 = \emptyset$. Le choix dépendant nous fournit une suite (s_n) de sommets telle que s_n préfixe strict de s_{n+1}. On montre par récurrence que la longueur de s_n est au moins n. Il suffit de poser a_n =la $n+1$-ième lettre de s_{n+1}, alors (a_n) est une branche.
   (b) La réciproque est vraie ! On se donne un arbre sur $A = X$ où les sommets sont les suites finies $(y_0, ..., y_n)$ vérifiant $(y_i, y_{i+1}) \in R$ pour $i = 0, ..., n-1$ et $y_0 = x_0$. Cet arbre est équeuté par hypothèse, et une branche infinie de cet arbre est une suite (y_n) comme voulu.