DM1 - à rendre le 27 janvier

Exercice 1. Non trivialité de la hiérarchie aux ordinaux limites.
Soit X un espace polonais non dénombrable et $\xi < \omega_1$ un ordinal limite. Montrer que

$$\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X).$$

Exercice 2. Universalité de l'espace de Cantor.
On se propose de redémontrer le fait que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur tout compact polonais.

1. En utilisant le développement binaire, montrer que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur $[0,1]$, puis sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
2. Rappeler pourquoi tout compact polonais est homéomorphe à un fermé de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
3. En utilisant le fait que tout fermé de l'espace de Cantor est un retract de l'espace de Cantor, déduire des questions précédentes que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur tout compact polonais.

Exercice 3. Une autre preuve de l'universalité de l'espace de Baire.
En introduisant un schéma $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ satisfaisant des propriétés similaires à celles utilisées en cours pour montrer que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur tout compact polonais, montrer directement que l'espace de Baire se surjecte continûment sur tout espace polonais.

Exercice 4. Construction de Cantor-Bendixon et groupes dénombrables.
Soit Γ un groupe dénombrable infini. On considère $\{0,1\}^\Gamma$ muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Cantor et que l'on identifie à l'ensemble des parties de Γ.

1. Soit $\mathcal{SG}_\Gamma$ l'ensemble des sous groupes de Γ. Montrer que $\mathcal{SG}_\Gamma$ est un fermé de $\{0,1\}^\Gamma$.
2. Effectuer la construction de Cantor-Bendixon sur $\mathcal{SG}_\mathbb{Z}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rang de Cantor-Bendixon de $\mathcal{SG}_{\mathbb{Z}^n}$ est égal à $n+1$.