DM2 - à rendre le 17 février

Exercice 1. Exemples d'ensembles analytiques.
Montrer que les ensembles suivants sont analytiques (on rappellera le borélien standard dont ce sont des sous-ensembles).

— L'ensemble des suites de réels qui admettent une sous-suite convergente.
— L'ensemble des fermés de $[0,1]$ qui contiennent un irrationnel.
— L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ dérivables quelque part, c'est-à-dire des fonctions f telles qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ avec f dérivable en x_0.

Exercice 2. Théorème du graphe borélien.
Soient X et Y deux boréliens standards, et soit $f : X \to Y$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'application f est borélienne ;
(ii) le graphe de f est borélien.

En déduire une autre preuve du fait que si τ et τ' sont deux topologies polonaises sur un ensemble X telles que $\tau \subseteq \tau'$ alors τ et τ' ont les mêmes tribus de boréliens. Montrer enfin que (i) et (ii) sont également équivalentes à

(iii) le graphe de f est analytique.

Exercice 3. Un ensemble $\boldsymbol{\Pi}^0_3$-complet.
Montrer que toute suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée par la suite d'ensembles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant k\}.$$

On rappelle que l'ensemble des suites de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est $\boldsymbol{\Pi}^3_0$-complet dans $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Montrer que l'ensemble des suites croissantes de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ dont la réunion est égale à $\mathbb{N}$ est également $\boldsymbol{\Pi}^0_3$-complet.
En utilisant les constructions précédentes, montrer que l'ensemble des suites d'entiers qui tendent vers $+\infty$ est $\boldsymbol{\Pi}^0_3$-complet.