DM3 - à rendre le 8 mars

Exercice 1. Les ensembles analytiques satisfont l'hypothèse du continu.
Soit X, Y deux espaces polonais et $f : X \to Y$ continue. On va montrer que si $f(X)$ n'est pas dénombrable alors il contient une copie homéomorphe de l'espace de Cantor. Supposons donc $f(X)$ non dénombrable.

1. Soit $U := \bigcup\{V \text{ ouvert de } X : f(V) \text{ dénombrable}\}$. Montrer que $f(U)$ est dénombrable. En déduire que l'on peut se ramener au cas où pour tout W ouvert de X, $f(W)$ n'est pas dénombrable.
2. En utilisant un schéma de Cantor, montrer qu'il existe une copie K de l'espace de Cantor dans X telle que $f_{\restriction K}$ soit injective.
3. Conclure que tout sous-ensemble analytique de tout espace polonais satisfait l'hypothèse du continu.

Exercice 2. Ensemble des bons ordres sur $\mathbb{N}$.
On rappelle qu'un ordre sur $\mathbb{N}$ est bon si tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Cela revient à dire qu'on a un ordre total bien fondé.

1. Montrer que l'ensemble des ordres sur $\mathbb{N}$ est un fermé du compact métrisable $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'ensemble WO (well-order) des bons ordres sur $\mathbb{N}$ est coanalytique.
3. Étant donné un arbre T sur $\mathbb{N}$, on définit l'ordre de Kleene-Brouwer sur l'arbre T par : pour $s, t \in T$, on pose $s <_{KB} t$ si s est un descendant de t (ce que l'on a noté $s \supsetneq t$ ou $s \prec t$ dans le cours) ou si $s_i < t_i$ où i est le premier entier tel que $s_i \neq t_i$ (on a donc essentiellement l'ordre lexicographique avec par exemple $000 <_{KB} 01$, sauf que 01 est plus petit que 0 !). Montrer que T est bien fondé si et seulement si $(T, <_{KB})$ est bien ordonnée.
4. En déduire que l'ensemble WO est $\mathbf{\Pi}^1_1$-complet.

Exercice 3. Théorème de Kunen-Martin.
Étant donnée une relation bien fondée $\prec$ sur un ensemble non vide X, on définit un rang associé sur X par induction : le rang de $x \in X$ est

$$\rho_\prec(x) := \sup_{y \prec x}(\rho_\prec(y) + 1).$$

Le rang de $\prec$ est alors défini par $\rho(\prec) := \sup_{x\in X}(\rho_\prec(x) + 1)$. On se propose de montrer le théorème de Kunen-Martin : si X est un borélien standard, toute relation bien fondée $\prec$ qui est analytique (comme sous ensemble de $X \times X$) vérifie $\rho(\prec) < \omega_1$.

1. On a vu en cours que si S et T sont des arbres sur $\mathbb{N}$ alors $\rho(S) \leqslant \rho(T)$ ssi il existe $f : S \to T$ strictement croissante. Généraliser ce résultat à des arbres sur un ensemble quelconque. Quelle forme d'axiome du choix avez-vous utilisée ?
2. Soit $\prec$ une relation bien fondée sur un ensemble X, on définit un arbre $T_\prec$ sur X dont les sommets sont les $(x_0, ..., x_n)$ avec $x_{i+1} \prec x_i$ pour $i = 0, ..., n-1$. Montrer que $\rho(\prec) = \rho(T_\prec)$.
3. Montrer le théorème de Kunen-Martin.