TD1 - Espaces polonais

Exercices du cours

Les exercices qui suivent détaillent certains résultats utilisés dans le cours qui ont été admis car ils relevaient plus de topologie générale que de faits spécifiques aux espaces polonais. Ils est donc bon de savoir les résoudre. En cas de blocage, n'hésitez pas à consulter Internet ou à me poser des questions (surtout dans le cas où vous seriez confronté à un énoncé faux !).

Exercice 1. Espaces à base dénombrable de voisinages.
On dit qu'un espace topologique X est à base dénombrable de voisinages (en anglais *first-countable*) si pour tout $x \in X$ il existe une famille dénombrable $\mathcal{F}_x$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $U \in \mathcal{F}_x$ tel que $U \subseteq V$.

1. Montrer qu'un sous-espace d'un espace à base dénombrable de voisinage est à base dénombrable de voisinage (pour la topologie induite).
2. Montrer qu'un espace topologique à base dénombrable d'ouverts est à base dénombrable de voisinages.
3. Montrer que les espaces topologiques métrisables sont à base dénombrable de voisinages.
4. Exhiber un exemple d'espace topologique à base dénombrable de voisinages qui ne soit pas à base dénombrable d'ouverts.

Exercice 2. Caractérisation séquentielle de la continuité.
On rappelle qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est continue si la préimage de tout ouvert de Y par f est ouverte dans X.

1. Montrer que f est continue ssi la préimage de tout fermé par f est fermée.
2. Montrer que si X est un espace topologique à base dénombrable de voisinages, une partie F de X est fermée ssi toute suite convergente d'éléments de F converge vers un élément de F.
3. Soit $f : X \to Y$ avec X et Y à base dénombrable de voisinages. Montrer que f est continue ssi pour tout $x \in X$ et toute suite (x_n) convergeant vers x, on a $f(x_n)$ qui converge vers $f(x)$.
4. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques à base dénombrable de voisinages est un homéomorphisme sur son image [1] si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de X et tout $x \in X$, on a l'équivalence
$$x_n \to x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x).$$

Exercice 3. Une opération sur les distances.
Dans le cours, on a utilisé le résultat qui suit dans le cas où $f(x) = \min(1, x)$. Cet exercice suppose une certaine familiarité avec les fonctions concaves ; en cas de blocage, le lecteur pourra donc supposer $f(x) = \min(1, x)$.
Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction concave non identiquement nulle telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est sous-additive, c'est-à-dire que pour tous réels $x, y \geqslant 0$, on a $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$.
2. On suppose f non nulle. Montrer que f est continue, puis qu'il existe $\delta > 0$ tel que la restriction de f à l'intervalle $[0, \delta[$ est un homéomorphisme sur son image.

1. C'est-à-dire que l'application induite $X \to f(X)$ est un homéomorphisme pour la topologie induite sur $f(X)$.

3. En déduire le résultat suivant : si X est un espace topologique et d est une distance compatible avec la topologie de X, alors $f \circ d$ est une distance compatible avec la topologie de X.
4. Montrer de plus que (X, d) et $(X, f \circ d)$ ont les mêmes suites de Cauchy.
5. Trouver une fonction f comme ci-dessus et bornée telle que que (X, d) et $(X, f \circ d)$ aient les mêmes isométries.

Exercice 4. Produits dénombrables d'espaces polonais.
On rappelle que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espace topologiques, le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est muni de la topologie produit dont une base d'ouverts est donnée par les ensembles de la forme

$$U_1 \times \cdots \times U_k \times \prod_{n>k} X_k,$$

où $k \in \mathbb{N}$ et pour $1 \leqslant i \leqslant k$, l'ensemble U_i est ouvert dans X_i.

1. Montrer qu'un produit dénombrable d'espaces à base dénombrable de voisinages est à base dénombrable de voisinages.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'espaces topologiques. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et soit $f \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Montrer que $f_k \to f$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_k(n) \to f(n)$.
3. Soit (X_n, d_n) une suite d'espaces métriques complets dont les distances sont bornées par 1. Montrer que la fonction $d : \prod X_n \times \prod X_n \to [0, +\infty[$ définie par

$$d((x_n), (x'_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, x'_n)$$

est une distance qui induit la topologie produit, puis qu'elle est complète.
4. Montrer qu'un produit dénombrable d'espace polonais est polonais.

Exercice 5. Compacité.
Soit K un compact métrisable et X un espace topologique à base dénombrable de voisinages.

1. Montrer que tout fermé de K est compact pour la topologie induite.
2. Montrer que si $f : K \to X$ est continue alors $f(K)$ est compact.
3. Montrer que si $f : K \to X$ est continue et injective alors c'est un homéomorphisme sur son image.

Exercice 6. Espace des applications bornées

1. Soit X un ensemble quelconque, soit $\ell^\infty(X)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ bornées, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Montrer que $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
2. Supposons que X soit un espace topologique compact métrisable, on note $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est un sous-espace de $\ell^\infty(X, \mathbb{R})$.
3. Montrer que $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet en prouvant directement qu'il est fermé dans $\ell^\infty(X, \mathbb{R})$.

Exercice 7. Distance à un ensemble.
Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A \subseteq X$ et $x \in X$, on définit $d_A(x) = \inf_{a\in A} d(x, A)$.

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ ssi $x \in \bar{A}$.
2. Montrer que pour tout $x, x' \in X$, $|d(x, A) - d(x', A)| < d(x, x')$, et conclure que l'application $d(\cdot, A) : X \to [0, +\infty[$ est continue.

Exercices s'appuyant sur le cours

Exercice 8. Éléments génériques de l'espace de Baire.
Soit $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'espace de Baire. On note $Y \subseteq X$ l'ensemble des applications injectives $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

1. Montrer que Y est un G_δ de X. Est-il dense ?
2. Montrer que l'ensemble A des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite des itérés $(f^k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs est un G_δ dense dans X.
3. L'ensemble $A \cap Y$ est-il dense dans Y ?

Exercice 9. Plongement des espaces compacts dénombrables dans $\mathbb{R}$
Soit K un espace compact métrisable dénombrable[2]. En utilisant le théorème de Baire et l'exercice 6, montrer qu'il existe une application continue injective de K dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Dimension d'un espace de Banach.
Montrer qu'il n'y a pas d'espaces de Banach de dimension dénombrable infinie.

Exercice 11. Fonctions continues nulle part dérivables.
On considère l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ qui est complète.

1. Montrer que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est séparable.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est comaigre.

Exercice 12. Compacité et distances compatibles.
Montrer qu'un espace polonais est compact si et seulement si toutes ses distances compatibles sont complètes.

Problème

Exercice 13. Compactifié de Stone-Cech des entiers.
On rappelle qu'un filtre sur $\mathbb{N}$ est un ensemble $\mathcal{U}$ de parties de $\mathbb{N}$ stable par intersection finie, contenant $\mathbb{N}$, et tel que pour tout $A \in \mathcal{U}$ et tout $B \subseteq \mathbb{N}$, on a l'implication $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$. Un filtre $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si il est maximal parmi les filtres pour l'inclusion, ou de manière équivalente, si pout tout $A \subseteq \mathbb{N}$, soit $A \in \mathcal{U}$ soit $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U}$.
Le **compactifié de Stone-Cech** des entiers, noté $\beta\mathbb{N}$, est l'ensemble des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, muni de la topologie donc une prébase est donnée par l'ensemble des

$$V_A = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}.$$

1. Montrer que l'ensemble des entiers naturels (identifiés aux ultrafiltres principaux correspondant) y est discret et dense. Montrer que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente.
2. Montrer que la prébase de la topologie décrite ci-dessus est en fait une base.
3. Soit X un espace topologique séparé infini. Montrer qu'il existe un ouvert U non vide tel que $X \setminus \overline{U}$ soit infini. En déduire que X contient une partie infinie discrète (c'est-à-dire sur laquelle la topologie induite est discrète).
4. Montrer que dans le compatifié de Stone-Cech des entiers, toute suite convergente est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang) !

Avec l'axiome du choix, on peut montrer que $\beta\mathbb{N}$ est compact et qu'il a pour cardinalité $2^{2^{\aleph_0}}$. De plus, il satisfait la propriété universelle suivante : toute application $f : \mathbb{N} \to K$ où K est compact se factorise de manière unique via $\beta\mathbb{N}$ (l'unique application $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \to K$ continue telle que $\tilde{f}_{\restriction\mathbb{N}} = f$ n'est d'autre que $\tilde{f}(\mathcal{U}) = \lim_{n\to\mathcal{U}} f(n)$).

2. L'hypothèse "métrisable" est en fait redondante, mais on n'a pas les outils pour le démontrer.

Indications

— **Exercice 1**, 4. On pourra montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est un exemple (cf. exercice 6 pour la définition).
— **Exercice 3**, 1. Supposons $x \leqslant y$. Comparer les pentes des segments reliant $(0,0)$ à $(x+y, f(x+y))$, à $(y, f(y))$ et enfin à $(x, f(x))$.
— **Exercice 7**, 2. Montrer d'abord que $d(x, A) \leqslant d(x, x') + d(x', A)$.
— **Exercice 9.** Les distances compatibles permettent de produire des applications continues intéressantes $K \to \mathbb{R}$.
— **Exercice 10**. On pourra montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé puis utiliser (et montrer !) le fait que dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel fermé d'intérieur non vide coïncide avec l'espace tout entier.
— **Exercice 11**, 2. On pourra considérer pour $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$E_n = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \forall x \in [1/n, 1-1/n] \exists h \in [-1/n, 1/n] : |f(x+h) - f(h)| > n\,|h|\}$$

— **Exercice 12**. On a vu que tout espace polonais se plonge dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$...
— **Exercice 13**, 1. Pour montrer que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente, on pourra considérer une sous suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'une limite $\mathcal{U}$ éventuelle ne peut pas contenir l'ensemble $\{\varphi(2n) : n \in \mathbb{N}\}$...
— **Exercice 13**, 4. On raisonne par l'absurde : il s'agit de supposer qu'on a une suite injective convergente d'ultrafiltres $(\mathcal{U}_n)$ et d'aboutir à une contradiction. Utiliser les question 2 et 3 pour voir que quitte à considérer une sous-suite, on peut trouver une suite (A_n) de parties de $\mathbb{N}$ telle que $A_n \in \mathcal{U}_m$ ssi $n = m$. Montrer qu'on peut même supposer les A_n deux à deux disjointes, et conclure en s'inspirant de la question 1.