# TD3 - Hiérarchie borélienne, ensembles analytiques

**Exercice 1. Paramétrages $X$-universels.**
Soit $X$ un espace polonais non dénombrable, montrer qu'il existe un $X$-paramétrage universel de $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$.

**Exercice 2. Non trivialité de la hiérarchie aux ordinaux limites.**
Soit $X$ un espace polonais non dénombrable et $\xi < \omega_1$ un ordinal limite. Montrer que

$$\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X).$$

**Exercice 3. Calculs de complexité** [1]

1. Montrer que l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ est un $\mathbf{\Pi}^0_3(\mathbb{N}^\mathbb{N})$.
2. Un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{N}$ est dit de densité nulle si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|A \cap \{0, ..., n-1\}|}{n} = 0.$$

Montrer que l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de densité nulle est un $\mathbf{\Pi}^0_3(2^\mathbb{N})$.

**Exercice 4. Stabilité des ensembles analytiques.**
Montrer les propriétés suivantes de stabilité des ensembles analytiques (l'ordre donné permet de ne pas boucler !)

— image directe borélienne (si $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ et $f : X \to Y$ est borélienne alors $f(A) \in \mathbf{\Sigma}^1_1(Y)$),
— intersection dénombrable (si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$),
— réunion dénombrable (si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$) et
— préimage borélienne (si $B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(Y)$ et $f : X \to Y$ est borélienne alors $f^{-1}(B) \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$).

Montrer qu'une seule de ces quatres propriétés n'est pas vraie des ensembles coanalytiques (on donnera un contre-exemple et montrera que les trois autres sont vraies).

**Exercice 5. Exemples d'ensembles analytiques.**
Montrer que les ensembles suivants sont analytiques (on rappellera le borélien standard dont ce sont des sous-ensembles).

— L'ensemble des suites de réels qui admettent une sous-suite convergente.
— L'ensemble des compacts de $[0, 1]$ qui contiennent un irrationnel.
— L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ dérivables quelque part, c'est-à-dire des $f$ telles qu'il existe $x_0 \in ]0, 1[$ avec $f$ dérivable en $x_0$.

**Exercice 6. Retour sur les boréliens.**
Soit $X$ un espace polonais. Montrer qu'il n'y a pas de $X$-paramétrage universel de $\mathbf{\Delta}^1_1(X)$. Pouvez-vous généraliser ce résultat à d'autres classes $\mathbf{\Gamma}$ ?

**Exercice 7. Ensemble des bons ordres sur $\mathbb{N}$.**
On rappelle qu'un ordre sur $\mathbb{N}$ est bon si tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Cela revient à dire qu'on a un ordre total bien fondé.

1. Montrer que l'ensemble des ordres sur $\mathbb{N}$ est un fermé du compact métrisable $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'ensemble $WO$ (well-order) des bons ordres sur $\mathbb{N}$ est coanalytique.

1. Pour beaucoup plus d'exemples, cf. [Kec95, chap. 23].

3. Étant donné un arbre $T$ sur $\mathbb{N}$, on définit l'ordre de Kleene-Brouwer sur l'arbre $T$ par : pour $s, t \in T$, on pose $s <_{KB} t$ si $s$ est un descendant de $t$ (ce que l'on a noté $s \supsetneq t$ ou $s \prec t$ dans le cours) ou si $s_i < t_i$ où $i$ est le premier entier tel que $s_i \neq t_i$ (on a donc essentiellement l'ordre lexicographique avec par exemple $000 <_{KB} 01$, sauf que 01 est plus petit que 0 !). Montrer que $T$ est bien fondé si et seulement si $(T, <_{KB})$ est bien ordonnée.
4. En déduire que l'ensemble $WO$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$-complet.

**Exercice 8. Théorème de Kunen-Martin.**
Étant donnée une relation bien fondée $\prec$ sur un ensemble non vide $X$, on définit un rang associé sur $X$ par induction : le rang de $x \in X$ est

$$\rho_\prec(x) = \sup_{y \prec x}(\rho_\prec(y) + 1).$$

Le rang de $\prec$ est alors défini par $\rho(\prec) := \sup_{x \in X}(\rho_\prec(x) + 1)$. On se propose de montrer le théorème de Kunen-Martin : si $X$ est un borélien standard, toute relation bien fondée $\prec$ qui est analytique (comme sous ensemble de $X \times X$) vérifie $\rho(\prec) < \omega_1$.

1. On a vu en cours que si $S$ et $T$ sont des arbres sur $\mathbb{N}$ alors $\rho(S) \leqslant \rho(T)$ ssi il existe $f : S \to T$ strictement croissante. Généraliser ce résultat à des arbres sur un ensemble quelconque. Quelle forme d'axiome du choix avez-vous utilisée ?
2. Soit $\prec$ une relation bien fondée sur un ensemble $X$, on définit un arbre $T_\prec$ sur $X$ dont les sommets sont les $(x_0, ..., x_n)$ avec $x_{i+1} \prec x_i$ pour $i = 0, ..., n-1$. Montrer que $\rho(\prec) = \rho(T_\prec)$.
3. Montrer le théorème de Kunen-Martin.
4. En déduire que si $X$ est un borélien standard, un bon ordre sur $X$ ne peut être analytique comme sous-ensemble de $X^2$ (on verra que si $X$ est polonais, un tel bon ordre ne peut en fait être Baire mesurable, donc ne peut être ni analytique ni coanalytique).

**Exercice 9. Fonctions continues tendant vers zéro point par point.**
On considère l'ensemble $CP$ des suites de fonctions continues $(f_n) \in (\mathcal{C}([0,1]))^{\mathbb{N}}$ telles que $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que $CP$ est coanalytique complet.
On pourra construire une suite d'intervalles fermés $(I_s), (J_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ décroissants avec pour chaque $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $J_s \subseteq I_s$, $I_{sn} \subseteq J_s$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{sn}$ disjoint de $I_{sm}$ pour tout $m \neq n$, et enfin $I_s$ de longueur au plus $2^{-|s|}$. On pourra de plus utiliser pour chaque $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ une fonction continue $0 \leqslant f_s \leqslant 1$ égale à 1 sur $J_s$ et 0 en dehors de $I_s$.

# Références

[Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.