TD4 - Groupes polonais

Exercice 1. Continuité de morphismes de groupes topologiques.

1. Soit G un groupe topologique. Montrer que pour tout $g \in G$, les voisinages de g sont exactement les ensemble de la forme gV où V est un voisinage de l'identité.
2. En déduire qu'un morphisme $\pi : G \to H$ entre deux groupes topologiques est continu ssi il est continu en l'identité : pour tout voisinage V de 1_H, l'ensemble $\pi^{-1}(V)$ est un voisinage de 1_G.

Exercice 2. Unicité de topologie polonaise.
On se propose de montrer que la topologie τ de groupe de $\mathfrak{S}_\infty$ que l'on a vue en cours est en fait la seule topologie de groupe polonais possible sur $\mathfrak{S}_\infty$. Soit τ' une autre topologie de groupe polonaise. On note

$$G_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_\infty : \forall i < n, \sigma(i) = i\} \text{ et } H_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_\infty : \forall i \geqslant n, \sigma(i) = i\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, l'ensemble G_n est le commutateur de H_n, c'est-à-dire que

$$G_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_\infty : \forall \tau \in H_n, \sigma\tau = \tau\sigma\}.$$

2. En déduire que G_n est τ'-fermé et conclure que $\tau = \tau'$.

Exercice 3. Sous groupes d'indice dénombrable.

1. Montrer que tout sous-groupe Baire-mesurable non maigre d'un groupe polonais est ouvert d'indice dénombrable.
2. Montrer qu'un groupe connexe n'a pas de sous-groupe Baire-mesurable d'indice dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ admet des sous-groupes d'indice dénombrable. *Indication :* voir $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$ espace vectoriel.
4. Montrer que G a la propriété d'indice dénombrable ssi tous les morphismes $G \to \mathfrak{S}_\infty$ sont continus. *Indication :* Si $H \leqslant G$ est d'indice dénombrable, considérer l'action de G sur G/H.

Exercice 4. Images de morphismes.
Soit $\pi : G \to H$ un morphisme continu entre deux groupes polonais G et H.

1. Montrer que π passe au quotient en un morphisme continu injectif $\tilde{\pi} : G/\mathrm{Ker}\,\pi \to H$.
2. En déduire que $\pi(G)$ est borélien.
3. Montrer que si π est surjective, alors π est ouverte.