TD5 - Relations d'équivalence

Exercice 1. Générique ergodicité sans groupe.
On se propose de généraliser le fait que les ensembles Baire mesurables E_0-invariants sont maigres ou comaigres. Pour une famille dénombrable d'espaces polonais (X_n) quelconque, on note $E_0((X_n))$ la relation d'équivalence sur $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ définie par

$$((x_n),(y_n)) \in E_0((X_n)) \iff \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, x_n = y_n.$$

Montrer que $E_0((X_n))$ est génériquement ergodique.

Exercice 2. Espace des ordres totaux.
Soit $\mathcal{L} = \{<\}$ et T la théorie des ordres totaux.

1. Rappeler pourquoi l'espace $X_{\mathcal{L},T}$ des modèles dénombrables de T est compact.
2. Montrer que l'action $\mathfrak{S}_\infty \curvearrowright X_{\mathcal{L},T}$ a toutes ses orbites denses.
3. Montrer que cette action a une orbite G_δ que l'on identifiera.

Exercice 3. Espace des graphes.
Soit $\mathcal{L} = \{\sim\}$ et T la théorie des graphes (relations irréflexives symétriques).

1. Rappeler pourquoi l'espace $X_{\mathcal{L},T}$ des modèles dénombrables de T est compact.
2. Montrer que l'action $\mathfrak{S}_\infty \curvearrowright X_{\mathcal{L},T}$ a une orbite dense.
3. A-t-elle une orbite fermée ? G_δ ? G_δ dense ?

Exercice 4. Action par conjugaison de $\mathfrak{S}_\infty$.
Considérons l'action de $\mathfrak{S}_\infty$ sur lui-même par conjugaison : pour $g, h \in \mathfrak{S}_\infty$, $g \cdot h = ghg^{-1}$.

1. Montrer que c'est une action continue.
2. Montrer que cette action admet une orbite G_δ-dense.
3. Montrer que la relation d'équivalence associée est lisse.

Indications

— Exercice 2, question 3 : Considérer les ordres linéaires denses sans extrémités.
— Exercice 3, question 3 : Considérer le graphe complet (pour fermé donc pour G_δ !), puis le graphe aléatoire (pour G_δ dense).
— Exercice 4, question 2 : Considérer les permutations avec une infinité de points fixes et une infinité d'orbites de taille n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.