# DM1 - à rendre le 17 octobre

**Exercice 1. Choix dénombrable et ensembles infinis.**
On appelle axiome du choix dénombrable l'énoncé suivant : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide. Il est évidemment plus faible que l'axiome du choix et est peu remis en cause du fait de son importance en analyse. On se propose de voir une de ses conséquences importantes.
Dans cet exercice, on dit qu'un ensemble est **infini** s'il n'est équipotent à aucun ensemble de la forme $\{0, ..., n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un ensemble $X$ est **réflexif** s'il existe $Y \subsetneq X$ tel que $X$ soit subpotent à $Y$.

1. Vérifier que $\mathbb{N}$ est réflexif.
2. Montrer que tout ensemble réflexif est infini.
3. Montrer que $X$ est réflexif ssi $X$ et non vide et pour tout $x \in X$, l'ensemble $X$ est équipotent à $X \setminus \{x\}$.
4. Soit $X$ un ensemble réflexif, montrer que si $X$ est subpotent à $Y$ alors $Y$ est réflexif.
5. Soit $X$ un ensemble infini.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des injections de $\{0, ..., n-1\}$ dans $X$ est non-vide.
   (b) En utilisant l'axiome du choix dénombrable, construire une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $X$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|A_n| = 2^n$.
   (c) En déduire l'existence d'une famille dénombrable disjointe de sous-ensembles non vides de $X$.
   (d) En utilisant une nouvelle fois l'axiome du choix dénombrable, conclure que $\mathbb{N}$ est subpotent à $X$, et donc que $X$ est réflexif.

*On a donc établi sous l'axiome du choix dénombrable l'équivalence entre trois définitions naturelles d'ensemble infini : ne pas être fini, être subpotent à un sous-ensemble strict, et enfin contenir une copie des entiers naturels. Cependant, on sait que ces équivalences constituent un axiome plus faible que l'axiome du choix dénombrable.*

**Solution de l'exercice 1.**

1. L'application $n \mapsto n+1$ est une bijection de $\mathbb{N}$ avec $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ donc $\mathbb{N}$ est réflexif.
2. Si $X$ est fini, soit $Y$ une sous-partie stricte de $X$, alors par le lemme des tiroirs il n'y a pas d'injection de $X$ dans $Y$ et donc $X$ n'est pas réflexif.
3. Si $X$ est non vide et pour tout $x \in X$, $X \setminus \{x\}$ est équipotent à $X$ alors soit $x \in X$ (possible car $X$ non vide !), par hypothèse $X \setminus \{x\} \subsetneq X$ est équipotent à $X$ qui est donc réflexif.
   Réciproquement supposons $X$ réflexif, soit $Y \subsetneq X$ et soit $f$ une bijection de $Y$ avec $X$. Soit $x_0 \in X \setminus Y$. Alors $X \setminus \{x_0\}$ est subpotent à $X$, et comme $X$ est subpotent à $Y \subseteq X \setminus \{x_0\}$ on a par le théorème de Cantor-Bernstein que $X \setminus \{x_0\}$ est équipotent à $X$.
   Maintenant soit $x \in X$ quelconque, alors la transposition de $X$ qui échange $x$ et $x_0$ envoie $X\setminus\{x_0\}$ sur $X \setminus \{x\}$ qui est donc également équipotent à $X$, ce qui achève la preuve de la réciproque.
4. Soit $Z \subsetneq Y$ et soit $f : Z \to Y$ bijection. Soit $Y' = X \setminus Y$ et soit $Z' = Y' \sqcup Z$. Alors on prolonge $f$ en l'identité sur $Y'$ ce qui nous donne une bijection $f'$ entre $Z'$ et $X$ témoignant du fait que $X$ est réflexif.
5. Soit $X$ un ensemble infini.
   (a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, pour $n = 0$ l'application vide convient. Puis, une injection $f$ étant construite de $\{0, ..., n-1\}$ dans $X$, on construit une injection de $\{0, ..., n\}$ dans $X$ en remarquant que $f$ n'est pas surjective (sinon $X$ serait fini, contredisant la question 2), donc on peut trouver $x \in X \setminus f(\{0, ..., n-1\})$ et on prolonge alors $f$ en posant $f(n) = x$.

(b) Soit pour $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $I_n$ des injections de $\{0, ..., 2^n - 1\}$ dans $X$. D'après la question précédente chaque $I_n$ est non vide donc d'après l'axiome du choix dénombrable $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide, ce qui nous fournit une famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'injections avec $f_n \in I_n$. On pose alors $A_n = f_n(\{0, ..., 2^n - 1\})$.

(c) On pose alors $B_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$. Alors comme $\bigcup_{m<n} A_m$ est de cardinal au plus $\sum_{m=0}^{n-1} 2^m = 2^n - 1 < 2^n$, l'ensemble $B_n$ est non vide. Par construction les ensembles $B_n$ sont disjoints comme voulu.

(d) Par l'axiome du choix dénombrable $\prod_n \in \mathbb{N} B_n$ est non vide et comme les éléments de cet ensemble sont des applications $\mathbb{N} \to X$ qui sont injectives (car les $B_n$ sont disjoints), on en déduit que $\mathbb{N}$ est subpotent à $X$, et donc $X$ est réflexif d'après la question 4.

**Exercice 2. Ordres dénombrables denses sans extrémités.**

On considère le lange $\mathcal{L} = \{<\}$ où $<$ est d'arité 2.

1. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé $\varphi$ dont l'ensemble des modèles est l'ensemble des ensembles totalement ordonnés sans maximum ni minimum et tels que l'ordre soit dense (pour tous $x < y$ on peut trouver $z$ tel que $x < z < y$).
2. Montrer que tout modèle non vide de $\varphi$ est infini.
3. Montrer que tous les modèles de $\varphi$ dénombrables sont isomorphes. On pourra s'inspirer du fait vu en TD que tout ordre dénombrable total se plonge dans $\mathbb{Q}$ et construire par récurrence des isomorphismes partiels $\varphi_n : A_n \to B_n$ se prolongeant de sorte que $A_{2n}$ contienne $a_n$ et $B_{2n+1}$ contienne $b_n$ où $A = \{a_n\}$ et $B = \{b_n\}$ sont deux $\mathcal{L}$-structures dénombrables satisfaisant $\varphi$.

**Solution de l'exercice 2.**

1. On considère les énoncés suivants :
   — $\varphi_1 : \forall x \forall y \neq (x < y) \wedge (y < x)$ (irréflexivité)
   — $\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z[(x < y \wedge y < z) \to (x < z)]$ (transitivité)
   — $\varphi_3 : \forall x \forall y[\neg(x = y) \to (x < y \vee y < x)]$ (totalité)
   — $\varphi_4 : \forall x \exists y \exists z(y < x \wedge x < z)$ (absence d'extrémités)
   — $\varphi_5 : \forall x \forall y(x < y \to (\exists z\, x < z \wedge z < y))$ (densité)
   Alors $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$ est comme voulu.
2. On considère un modèle non vide de $\varphi$. Alors il est muni d'un ordre total sans extrémités, en particulier il n'a pas de minimum. Or on a vu en TD que tout ordre total fini non vide admet un minimum, donc le modèle est infini.
3. On montre que la famille $\mathcal{F}$ des isomorphismes partiels entre les parties finies de deux ordres $(X, <_X)$ et $(Y, <_Y)$ totaux denses et sans extrémités satisfait la **propriété de va-et-vient**, c'est à dire qu'étant donné $f \in \mathcal{F}$ :
   — pour tout $x \in X \setminus \operatorname{dom} f$, il existe $g \in \mathcal{F}$ prolongeant $f$ telle que $x \in \operatorname{dom} g$, et
   — pour tout $Y \in X \setminus \operatorname{img} f$, il existe $g \in \mathcal{F}$ prolongeant $f$ telle que $y \in \operatorname{img} g$.
   La preuve de cette propriété se fait comme la preuve vue en TD que tout ordre dénombrable total se plonge dans $\mathbb{Q}$, je ne la détaille pas.
   Il est clair que dans le cas où les deux ordres sont dénombrables, cette propriété permet de construire par récurrence sur $n$ des isomorphismes partiels $\varphi_n$ comme dans l'énoncé, et on pose alors $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ qui est comme voulue.

**Exercice 3. Théorème de Ramsey fini.**

Si $A$ est un ensemble on note $\mathcal{P}_n(A)$ l'ensemble des parties de $A$ ayant exactement $n$ éléments. On admet le théorème suivant (connu sous le nom de théorème de Ramsey) :

**Théorème A :** *Pour toute application $f$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ dans $\{0, 1\}$ il existe un sous-ensemble infini $A$ de $\mathbb{N}$ tel que la restriction de $f$ à $\mathcal{P}_2(A)$ soit constante.*

Le but de l'exercice est d'utiliser le théorème de compacité du calcul propositionnel pour déduire du théorème A le résultat suivant.

**Théorème B :** *Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un entier $N$ tel que pour toute application $f$ de $\mathcal{P}_2(\{0, 1, \ldots, N\})$ dans $\{0, 1\}$ il existe une partie $A \subseteq \{0, 1, \ldots, N\}$ à $n$ éléments telle que $f$ soit constante sur $\mathcal{P}_2(A)$.*

Pour cela on considère des formules propositionnelles construites sur l'ensemble de variables $\mathcal{P} = \{p_{\{n,m\}}; \{n, m\} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{N})\}$.

1. Soit $A$ une partie finie de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments. Construire une formule $F_A$ telle que si $\delta$ est une distribution de valeurs de vérité sur $\mathcal{P}$, alors $\delta \models F_A$ ssi $\delta$ est constante sur $\{p_{\{n,m\}}; \{n, m\} \in \mathcal{P}_2(A)\}$.
2. Soit $n > 1$ un entier. Montrer, en utilisant le théorème A, que l'ensemble $\{\neg F_A\ ;\ A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})\}$ n'est pas satisfaisable.
3. Montrer le théorème B.
4. **Application :** On considère le jeu suivant, à deux joueurs. On place un certain nombre de points sur une feuille. Chaque joueur, à son tour, relie par un trait deux points encore non reliés, trait rouge pour le premier joueur, bleu pour le second. Le premier joueur ayant ainsi tracé un pentagone est déclaré vainqueur. Montrer que, si l'on place au départ suffisamment de points, il ne peut y avoir de partie nulle (i.e. sans vainqueur).

**Solution de l'exercice 3.**

1. On pose
$$F_A = (\bigwedge_{B\in\mathcal{P}_2(A)} p_B) \vee (\bigwedge_{B\in\mathcal{P}_2(A)} \neg p_B).$$
2. Si l'ensemble des $\neg F_A$ pour $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ était satisfaisable, on aurait une d.v.v. $\delta$ les satisfaisant. Pour $B \in \mathcal{P}_2(\mathbb{N})$, on pose $f(B) = \delta(p_B)$, alors d'après le théorème A il existe $A' \subseteq \mathbb{N}$ infini tel que la restriction de $f$ à $A'$ soit constante. Comme $A'$ est infini, il existe $A \subseteq A'$ de cardinalité $n$. La restriction de $f$ à $\mathcal{P}_2(A)$ est donc constante, ce qui contredit le fait que $\delta \models \neg F_A$. Ainsi $\{F_A : A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})\}$ n'est pas satisfaisable.
3. Par compacité l'ensemble des $\neg F_A$ n'est pas finiment satisfaisable, soient donc $A_1, ..., A_k \in \mathcal{P}_n$ tels que $\neg F_{A_1} \wedge \cdots \wedge \neg F_{A_k}$ ne soit pas satisfaisable. Soit $f : \mathcal{P}_2(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \to \{0, 1\}$, soit $\delta$ une d.v.v. telle que $\delta(p_B) = f(B)$ pour tout $B \in \mathcal{P}_2(A_1 \cup \cdots \cup A_k)$. Alors $\delta$ ne satisfait pas $\neg F_{A_1} \wedge \cdots \wedge \neg F_{A_k}$ donc $\delta$ est constante sur un des $\{p_B : B \in \mathcal{P}_2(A_i)\}$, donc $f$ est constante sur $A_i$. Soit $N = |A_1 \cup \cdots \cup A_k| - 11$, alors un tel $N$ est comme voulu car $\{0, ..., N\}$ est en bijection avec $A_1 \cup \cdots \cup A_k$.
4. On applique le théorème pour $n = 5$, on prend alors $N+1$ points. Si on avait une partie nulle, c'est qu'il n'y a plus de traits à dessiner et on considère l'application $f : \mathcal{P}_2(\{0, ..., N\}) \to \{bleu, rouge\}$ donnée par la couleur des traits. Alors $f$ serait constante sur l'ensemble des $\mathcal{P}_2(A)$ pour un $A$ de cardinalité 5, ce qui nous donne un graphe complet à 5 points (en particulier un pentagone) monochromatique, contradiction.