DM1 - à rendre le 17 octobre

Exercice 1. Choix dénombrable et ensembles infinis.
On appelle axiome du choix dénombrable l'énoncé suivant : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide. Il est évidemment plus faible que l'axiome du choix et est peu remis en cause du fait de son importance en analyse. On se propose de voir une de ses conséquences importantes.
Dans cet exercice, on dit qu'un ensemble est **infini** s'il n'est équipotent à aucun ensemble de la forme $\{0, ..., n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un ensemble X est **réflexif** s'il existe $Y \subsetneq X$ tel que X soit subpotent à Y.

1. Vérifier que $\mathbb{N}$ est réflexif.
2. Montrer que tout ensemble réflexif est infini.
3. Montrer que X est réflexif ssi pour tout $x \in X$, l'ensemble X est équipotent à $X \setminus \{x\}$.
4. Soit X un ensemble réflexif, montrer que si X est subpotent à Y alors Y est réflexif.
5. Soit X un ensemble infini.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des injections de $\{0, ..., n-1\}$ dans X est non-vide.
   (b) En utilisant l'axiome du choix dénombrable, construire une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|A_n| = 2^n$.
   (c) En déduire l'existence d'une famille dénombrable disjointe de sous-ensembles non vides de X.
   (d) En utilisant une nouvelle fois l'axiome du choix dénombrable, conclure que $\mathbb{N}$ est subpotent à X, et donc que X est réflexif.

On a donc établi sous l'axiome du choix dénombrable l'équivalence entre trois définitions naturelles d'ensemble infini : ne pas être fini, être subpotent à un sous-ensemble strict, et enfin contenir une copie des entiers naturels. Cependant, on sait que ces équivalences constituent un axiome plus faible que l'axiome du choix dénombrable.

Exercice 2. Ordres dénombrables denses sans extrémités.
On considère le lange $\mathcal{L} = \{<\}$ où $<$ est d'arité 2.

1. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé φ dont l'ensemble des modèles est l'ensemble des ensembles totalement ordonnés sans maximum ni minimum et tels que l'ordre soit dense (pour tous $x < y$ on peut trouver z tel que $x < z < y$).
2. Montrer que tout modèle dénombrable de φ est infini.
3. Montrer que tous les modèles de φ dénombrables sont isomorphes. On pourra s'inspirer du fait vu en TD que tout ordre dénombrable total se plonge dans $\mathbb{Q}$ et construire par récurrence des isomorphismes partiels $\varphi_n : A_n \to B_n$ se prolongeant de sorte que A_{2n} contienne a_n et B_{2n+1} contienne b_n où $A = \{a_n\}$ et $B = \{b_n\}$ sont deux $\mathcal{L}$-structures dénombrables satisfaisant φ.

Exercice 3. Théorème de Ramsey fini.
Si A est un ensemble on note $\mathcal{P}_n(A)$ l'ensemble des parties de A ayant exactement n éléments. On admet le théorème suivant (connu sous le nom de théorème de Ramsey) :

Théorème A : *Pour toute application f de $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ dans $\{0, 1\}$ il existe un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{P}_2(A)$ soit constante.*

Le but de l'exercice est d'utiliser le théorème de compacité du calcul propositionnel pour déduire du théorème A le résultat suivant.

Théorème B : *Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un entier N tel que pour toute application f de*

$\mathcal{P}_2(\{0,1,\ldots,N\})$ dans $\{0,1\}$ il existe une partie $A \subseteq \{0,1,\ldots,N\}$ à n éléments telle que f soit constante sur $\mathcal{P}_2(A)$.

Pour cela on considère des formules propositionnelles construites sur l'ensemble de variables $\mathcal{P} = \{p_{\{n,m\}}; \{n,m\} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{N})\}$.

1. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments. Construire une formule F_A telle que si δ est une distribution de valeurs de vérité sur $\mathcal{P}$, alors $\delta \models F_A$ ssi δ est constante sur $\{p_{\{n,m\}}; \{n,m\} \in \mathcal{P}_2(A)\}$.
2. Soit $n > 1$ un entier. Montrer, en utilisant le théorème A, que l'ensemble $\{\neg F_A \ ; \ A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})\}$ n'est pas satisfaisable.
3. Montrer le théorème B.
4. **Application :** On considère le jeu suivant, à deux joueurs. On place un certain nombre de points sur une feuille. Chaque joueur, à son tour, relie par un trait deux points encore non reliés, trait rouge pour le premier joueur, bleu pour le second. Le premier joueur ayant ainsi tracé un pentagone est déclaré vainqueur. Montrer que, si l'on place au départ suffisamment de points, il ne peut y avoir de partie nulle (i.e. sans vainqueur).