DM2 - à rendre le 28 novembre

Exercice 1. Va-et-vient.

Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable. Soit T une théorie, soient M et N deux modèles de T. Un **isomorphisme partiel** entre M et N est un isomorphisme $\varphi : M' \to N'$ entre deux sous-structures M' et N'. Deux $\mathcal{L}$-structures M et N sont **en va-et-vient** s'il existe une famille $\mathcal{F}$ non vide d'isomorphismes partiels entre M et N qui est **karpienne**, c'est-à-dire telle que

— Pour tout $a \in M$, tout isomorphisme partiel $f \in \mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme partiel $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ dont le domaine contient a.

— Pour tout $b \in N$, tout isomorphisme partiel entre $f \in \mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme partiel entre M et N dont l'image contient b.

1. Montrer que si M et N sont en va-et-vient, alors ils ont la même théorie. On pourra montrer par induction sur les formules que les éléments de $\mathcal{F}$ préservent les formules : pour tout $\bar{a} \in M^n$, toute formule φ, on a $M \models \varphi(\bar{a})$ ssi $N \models \varphi(f(\bar{a}))$. En déduire que si tous les modèles de T sont en va-et-vient alors T est complète.
2. Montrer que si T est une théorie dont les modèles satisfont que les isomorphismes partiels entre sous-structures finiment engendrées forment une famille karpienne, alors tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes. On dit que T est $\aleph_0$-catégorique.
3. Montrer que si T est $\aleph_0$-catégorique et tous ses modèles sont infinis, alors T est complète. On pourra utiliser le théorème de Löwenheim-Skolem descendant.
4. Montrer que les ordres totaux denses sans extrémités sont en va-et-vient, et que leur théorie est $\aleph_0$-catégorique.

Exercice 2. Théories héréditaires.

Soit $\mathcal{L}$ un langage.

1. Soient $c_1, ...c_n$ des symboles de constantes n'appartenant pas à $\mathcal{L}$, soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule et soit T une théorie. Montrer que $T \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ ssi $T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\}$ n'est pas consistante.
2. Si T est une théorie, on note $T^{\forall}$ l'ensemble des conséquences universelles de T, c'est-à-dire des énoncés universels φ tels que $T \models \varphi$. Montrer que les modèles de $T^{\forall}$ sont exactement les sous-structures de modèles de T.
3. Une théorie T est dite héréditaires si toutes les sous-structures de ses modèles satisfont T. Montrer qu'une théorie T est héréditaire ssi elle est équivalente à $T^{\forall}$ (on parle en fait de théorie universelle).
4. Donner une axiomatisation de la classe des groupes dans le langage $(e, \cdot)$ et montrer qu'elle n'est pas héréditaire. Que se passe-t-il si on ajoute le symbole $^{-1}$?

Exercice 3. Extensions élémentaires de degré de transcendance infini.

Soit $\mathcal{L}_a = \{0, 1, +, \cdot\}$ le langage des anneaux. Soient $K \subseteq L$ une extension de corps vus comme $\mathcal{L}$-structures, on dit qu'elle est de degré de transcendance infini s'il existe une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de L telle que pour tout polynome $P \in K[X_1, ..., X_n]$ non nul, on a $P(x_1, ..., x_n)$ non nul. Montrer que tout corps infini admet une extension élémentaire de degré de transcendance infini.