DM3 - à rendre le 5 décembre

Exercice 1. Des exemples.
Donner un exemple de théorie finiment axiomatisable complète dont tous les modèles sont infinis et un exemple de théorie non finiment axiomatisable complète dont tous les modèles sont infinis. Une théorie complète peut-elle avoir à la fois des modèles finis et infinis ?

Exercice 2. Ordres stricts.
On considère le langage formé d'une relation binaire $\mathcal{L} = \{<\}$.

1. Donner un énoncé φ qui dit que $<$ est un ordre strict (irréflexif et transitif).
2. Donner une preuve formelle que $\{\varphi\} \vdash \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)$.

Exercice 3. Graphe aléatoire.
On considère qu'un graphe G (non orienté, sans boucles) satisfait la propriété (E) si : pour tous sous-ensembles finis disjoints F_+ et F_- de sommets de G, il existe un sommet de G relié à tous les sommets de F_+ et à aucun sommet de F_-.

1. Donner une axiomatisation T de la classe des graphes satisfaisant la propriété (E).
2. Montrer que tout graphe dénombrable se plonge dans tout modèle de T. On pourra s'inspirer de la construction vue pour les ordres linéaires denses.
3. Montrer par un va-et-vient que T est $\aleph_0$-catégorique. T est-elle complète ?
4. On appelle graphe aléatoire un modèle dénombrable de T (ils sont tous isomorphes d'après la question précédente. Il n'est pas clair que de tels graphes existent mais c'est en partie l'objet de cette question). On va montrer que tout automorphisme de graphe dénombrable s'étend en un automorphisme du graphe aléatoire. Soit donc $G = (V, A)$ un graphe dénombrable quelconque et α un automorphisme de G.
   (a) On définit $E(G)$ comme le graphe dont les sommets sont l'ensemble $\mathcal{P}_f(V) \sqcup V$ où $\mathcal{P}_f(V)$ est l'ensemble des parties finies de V, et les arêtes sont de deux types :
   — On conserve les arêtes de G entre les éléments de V.
   — On relie chaque partie finie F de V avec tous les sommets $v \in F$.
   Montrer que G se plonge dans $E(G)$ et que α s'étend en un automorphisme de $E(G)$.
   (b) Définir proprement le graphe $E_\infty(G) = G \cup E(G) \cup E(E(G))$... et montrer qu'il satisfait la propriété (E).
   (c) Montrer que α s'étend en un automorphisme de $E_\infty(G)$. Conclure.

   Remarque. La même preuve montre que le groupe d'automorphisme de G se plonge dans le groupe d'automorphisme du graphe aléatoire.