TD 1 - Des ordres

Une *relation binaire* sur un ensemble X est un sous-ensemble R de $X \times X$; pour $x, y \in X$ la notation xRy signifie $(x, y) \in R$. Une relation binaire $<$ sur X définit un *ordre (partiel strict)* sur X si elle est *irréflexive* (pour tout x dans X, $\neg x < x$) et transitive (pour tous x, y, z dans X, on a l'implication $x < y$ et $y < z \Rightarrow x < z$). On dit alors que $(X, <)$ est un ensemble ordonné. Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné.

— Si deux éléments distincts de X sont toujours comparables (pour tout $x \neq y$ dans X, $x < y$ ou $y < x$), on dit que $<$ définit un *ordre total (strict)* et que $(X, <)$ est *totalement ordonnné.*

— Soit $Y \subseteq X$. Un élément $x \in X$ est un *majorant* (resp. *minorant*) de Y si pour tout y dans Y distinct de x on a $x > y$ (resp. $x < y$). Si de plus $x \in Y$ on dit que x est le maximum (resp. minimum) de Y.

— Un élément $x \in X$ est *maximal* (resp. *minimal*) s'il n'existe pas de $y \in X$ tel que $y > x$ (resp. $y < x$).

— On dit que $<$ est un *bon ordre* (ou que $(X, <)$ est bien ordonné) si toute partie non vide Y de X admet un minimum.

Soient $(E, <)$ et $(F, <)$ deux ensembles ordonnés. Une application injective $f : E \to F$ est appelé un *plongement* (d'ensembles ordonnés) si pour tous $x, y \in E$ on a $x < y$ ssi $f(x) < f(y)$. Si f est bijective, on l'appelle un *isomorphisme* (d'ensembles ordonnés).

Remarque. Si $<$ est un ordre sur X, on définit l'ordre opposé $<^{opp}$ par $x <^{opp} y$ si $y < x$. Un minimum pour $<$ devient alors un maximum pour $<^{opp}$, et inversement.
Si $<$ est un ordre sur X, on notera $x \leqslant y$ pour $x < y$ ou $x = y$.

Exercice 1. Propriétés de base.

1. Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné et soit $Y \subseteq X$. Montrer que Y possède au plus un minimum (et donc au plus un maximum), ce qui justifie le fait de parler *du* minimum (resp. maximum) de Y.
2. Montrer que dans un ensemble totalement ordonné, tout élément minimal est le minimum (et donc tout élément maximal est le maximum).
3. Donner un exemple fini d'ensemble bien ordonné. Donner un exemple infini d'ensemble bien ordonné.
4. Montrer que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

Solution de l'exercice 1.

1. Soient x_1 et x_2 deux minimums de Y, supposons $x_1 \neq x_2$. Alors par définition du minimum on a à la fois $x_1 < x_2$ et $x_2 < x_1$ donc par transitivité $x_1 < x_1$ ce qui contredit l'irréflexivité. Donc $x_1 = x_2$ et donc Y admet au plus un minimum.
2. Suppposons x minimal, soit $y \in X$ distinct de x. Comme l'ordre est total, on a soit $x < y$ soit $y < x$. Mais comme x est minimal, on ne peut avoir $y < x$, et on a donc $x < y$. Ainsi x est bien le minimum de X.
3. L'ensemble vide muni de l'ordre vide est bien ordonné. $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel est bien ordonné. On peut en fait montrer qu'il se plonge dans tout ensemble bien ordonné infini (exercice !).
4. Soit $x \neq y$ deux éléments de X, considérons l'ensemble $\{x, y\}$. Comme $(X, <)$ est bien ordonné, cet ensemble admet un minimum qui est soit x soit y. Si c'est x, on a $x < y$, si c'est y, on a $y < x$; dans les deux cas on a $x < y$ ou $y < x$ ce qui établit que $(X, <)$ est totalement ordonnée.

Exercice 2. Ordre sur une union disjointe.
Soient $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ des ensembles ordonnés disjoints.

1. Soit $X = E \sqcup F$, sur X, on définit la relation $<_X = <_E \cup <_F \cup E \times F$.
   Vérifier que $<_X$ définit un ordre sur X. (On appelle $(X, <_X)$ la *somme ordonnée* de $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$.) Que se passe-t-il si F est un singleton ?
2. Montrer que si E et F sont totalement ordonnés, X l'est aussi.
3. Montrer que si E et F sont bien ordonnés, X l'est aussi.

Solution de l'exercice 2.

1. Remarquons que la définition de l'ordre est la suivante : on a $x < y$ ssi on est dans l'un des trois cas mutuellement exclusifs suivants :
   — $x \in E$, $y \in E$ et $x <_E y$
   — $x \in F$, $y \in F$ et $x <_F y$
   — $x \in E$ et $y \in F$
   En particulier si $x < y$ alors $(x \in F \Rightarrow y \in F)$ et $(y \in E \Rightarrow x \in E)$.
   Montrons que $<$ est irréflexif : soit $x \in X$, supposons $x < x$, alors par irréflexivité de $<_E$ on a $x \notin E$ et par irréflexivité de $<_F$ on a $x \notin F$ ce qui est absurde, donc $x \not< x$.
   Pour la transitivité, supposons $x < y$ et $y < z$. On distingue deux cas :
   — $y \in E$ auquel cas $x \in E$. Si $z \in E$ on a $x < z$ par transitivité de $<_E$, sinon on a $x < z$ par définition de l'ordre $<$. Dans tous les cas on a bien $x < z$.
   — $y \in F$ auquel cas $z \in F$. Si $x \in E$ on a $x < z$ par définition de $<$, sinon on a $x < z$ par transitivité de $<_F$. Dans tous les cas on a bien $x < z$.
   Ainsi $x < z$ ce qui établit la transitivité. Donc $<$ est un ordre.
   Si $F = \{f\}$ alors on a simplement ajouté à E un élément plus grand que tout le monde.
2. Il s'agit encore d'une simple disjonction de cas. Soit $x \neq y$:
   — Si $x \in E$ et $y \in E$ alors x et y sont comparables car $<_E$ est total,
   — Si $x \in F$ et $y \in F$ alors x et y sont comparables car $<_F$ est total,
   — Si $x \in E$ et $y \in F$ alors $x < y$, si $x \in F$ et $y \in E$ alors $y < x$
   Dans tous les cas, x et y sont bien comparables pour $<$, et $<$ est donc total.
3. Soit A une partie non vide de X. Si $A \cap E \neq \emptyset$, le minimum x de $A \cap E$ pour $<_E$ est un minimum pour $<$ car pour $y \in A$ distinct de x, soit $y \in E$ auquel cas $x <_E y$ donc $x < y$, soit $y \in F$ et on a également $x < y$.
   Si $A \cap E = \emptyset$, on a $A \cap F = A \neq \emptyset$ car A est non vide et $X = E \sqcup F$. Alors le minimum de $A \cap F$ pour $<_F$ est le minimum de A pour $<$. Dans tous les cas A admet un mimimum, et donc $<$ est bien ordonné.

Exercice 3. Ordre produit, ordre lexicographique.
Soient $(X, <)$ et $(X', <')$ des ensembles ordonnés.

1. Montrer que la relation $\tilde{<}$ sur $X \times X'$, définie par $(x, x')\tilde{<}(y, y')$ si, et seulement si, $x < y$ et $x' <' y'$ est un ordre sur $X \times X'$. Est-ce que $\tilde{<}$ est toujours total si $<$ et $<'$ le sont ?
2. On définit l'ordre *lexicographique* sur $X \times X'$, en posant $(x, x') <_{lex} (x', y')$ ssi $x < y$ ou ($x = y$ et $x' <' y'$). Vérifier que $<_{lex}$ définit bien un ordre sur $X \times X'$.
3. Montrer que si $<$ et $<'$ sont totaux, $<_{lex}$ l'est aussi.
4. Montrer que si $<$ et $<'$ sont bons, $<_{lex}$ l'est aussi.

Solution de l'exercice 3.

1. Si $(x, x') <_{lex} (x, x')$ comme $x = x$ on a $x' <' x'$ ce qui est impossible : $<_{lex}$ est irréflexif. Pour la transitivité, supposons $(x, x') <_{lex} (y, y')$ et $(y, y') <_{lex} (z, z')$. Si $z = x$, on ne peux avoir $y \neq x$ car alors $x < x$ par transitivité. Donc $x = y = z$; ainsi $x' <' y'$ et $y' <' z'$et alors $x' <' z'$ par transitivité et donc $(x, x') <_{lex} (z, z')$. Si $z \neq x$, on distingue deux cas :
   — $x = y$, auquel cas $x < z$ donc $(x, x') <_{lex} (z, z')$.
   — $x \neq y$: alors $x < y$ et si $y = z$ alors $x < z$ tandis que si $y \neq z$ alors $y < z$ donc $x < z$. Dans tous les cas $x < z$ ce qui entraine $(x, x') <_{lex} (z, z')$.

On a donc bien $(x,x') <_{lex} (z,z')$ dans tous les cas, et donc $<_{lex}$ est bien transitif.

2. Soit $(x,x') \neq (y,y')$, alors soit $x \neq y$ auquel cas x et y sont comparables pour $<$ et donc (x,x') et (y,y') sont comparables pour $<_{lex}$, soit $x = y$ et alors $x' \neq y'$ donc x' et y' sont comparables pour $<'$ et ainsi (x,x') et (y,y') sont comparables pour $<_{lex}$. Dans tous les cas (x,x') et (y,y') sont comparables pour $<_{lex}$ qui est donc un ordre total.
3. Soit $A \subseteq X \times X'$ non vide, soit B la projection sur X de A, c'est-à-dire $B = \{x \in X : \exists x' \in X', (x,x') \in A\}$. L'ensemble B étant non vide, soit x son minimum pour $<$. Soit alors $C = \{x' \in X' : (x,x') \in A\}$ qui est non vide car $x \in B$, soit $x' = \min C$. Alors (x,x') est le minimum de A : si $(y,y') \in A$ est distinct de (x,x'), soit $x \neq y$ auquel cas $x < y$ car $y \in B$ donc $(x,x') <_{lex} (y,y')$, soit $x = y$ et alors $x' \neq y' \in C$ donc $x' <' y'$ et donc $(x,x') <_{lex} (y,y')$. Ainsi $<_{lex}$ est un bon ordre.

Exercice 4. Bestiaire d'ordres.

Dans chacun des cas suivants donner un exemple d'un ensemble X ordonné ayant la propriété demandée :

1. un ensemble totalement ordonné infini ayant à la fois un minimum et un maximum,
2. un ensemble totalement ordonné infini ayant un maximum mais pas de minimum,
3. un ensemble infini totalement ordonné *discret* (pour tout $x \in X$, si x n'est pas maximal alors il existe $y > x$ tel que $]x,y[= \emptyset$, et si x n'est pas minimal alors il existe $y < x$ tel que $]y,x[= \emptyset$, où pour $x,y \in X$ on note $]x,y[$ l'ensemble des $z \in X$ tels que $x < z < y$),
4. un ensemble infini totalement ordonné discret $(E,<)$ contenant une partie F infinie tel que la restriction de $<$ à F soit un ordre *dense* (entre deux éléments distincts de F il existe toujours un troisième élément),
5. un ensemble infini X muni d'un ordre qui n'est pas total et qui a un plus grand élément et un plus petit élément,
6. un ensemble infini X muni d'un ordre qui admet des éléments minimaux mais qui n'a pas de minimum,
7. un ensemble infini bien ordonné qui admet un maximum,
8. un exemple d'ensemble totalement ordonné mais non bien ordonné. Pouvez-vous trouver un exemple fini ?

Solution de l'exercice 4.

1. $[0,1]$ muni de l'ordre usuel est un ensemble totalement ordonné infini ayant à la fois un minimum et un maximum,
2. $]0,1]$ muni de l'ordre usuel un ensemble totalement ordonné infini ayant un maximum mais pas de minimum,
3. $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel et $\mathbb{Z}$ muni de l'ordre usuel sont des ensembles infini totalement ordonnés discret.
4. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique est un ensemble infini totalement ordonné discret tel que la restriction de $<_{lex}$ à $\mathbb{Q} \times \{0\}$ soit un ordre dense.
5. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ muni de l'inclusion est un ensemble infini muni d'un ordre qui n'est pas total et qui a un plus grand élément $\mathbb{N}$ et un plus petit élément $\emptyset$,
6. L'ensemble infini $\mathbb{N}$ muni de l'ordre vide admet des éléments minimaux mais n'a pas de minimum. On peut aussi prendre l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$ muni de l'inclusion.
7. L'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un ensemble infini bien ordonné qui admet un maximum.
8. $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel un exemple d'ensemble totalement ordonné mais non bien ordonné. On ne peut pas trouver d'exemple fini : en effet on montre par récurrence sur la cardinalité que tout ensemble fini non vide totalement ordonné a un minimum ; en particulier tout-sous ensemble non vide d'un ensemble fini totalement ordonné a un minimum et donc tout ensemble fini est bien ordonné.

Exercice 5. Preuve du lemme de Zorn.

On se propose de prouver le lemme de Zorn à partir de l'axiome du choix. On va montrer une version plus forte du lemme de Zorn que voici.

Soit $(X,<)$ un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné admet un majorant. Alors X admet un élément maximal.

1. Vérifier que l'énoncé ci-dessus implique le lemme de Zorn usuel.
2. On va raisonner par l'absurde : prenons $(X,<)$ ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné admet un majorant, et supposons que X n'admette pas d'élément maximal. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-ensembles bien ordonnés de X. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathcal{C} \to X$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $g(Y)$ est un majorant strict de Y.
3. On fixe une fonction $g : \mathcal{C} \to X$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $g(Y)$ est un majorant strict de Y. Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ bien ordonné est appelé une g-chaîne si pour tout $y \in Y$, on a $y = g(\{x \in Y : x < y\})$.
   (a) Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux g-chaînes, alors Y_1 est un segment initial[1] de Y_2 ou Y_2 est un segment initial de Y_1. On pourra considérer la réunion des parties qui sont à la fois des segments initiaux de Y_1 et de Y_2.
   (b) Montrer que la réunion des g-chaînes est une g-chaîne.
   (c) Conclure.

Solution de l'exercice 5.

1. Tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné, donc si tout sous-ensemble totalement ordonné a un majorant alors en particulier tout ensemble bien ordonné à un majorant. Ainsi le lemme de Zorn usuel est conséquence de cette version.
2. Par hypothèse tout $Y \in \mathcal{C}$ a un majorant, et comme ce dernier n'est pas maximal on peut en fait trouver un majorant strict. Soit $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ une fonction de choix, il suffit de poser $g(Y) = f(\{x \in X : \forall y \in Y, y < x\})$.
3. (a) Soit I la réunion des parties qui sont à la fois des segments initiaux de Y_1 et de Y_2, alors I est toujours un segment initial de Y_1 et de Y_2. On va montrer que $I = Y_1$ ou $I = Y_2$. En effet, supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire $I \subsetneq Y_1$ et $I \subsetneq Y_2$. Comme Y_1 est bien ordonné, $Y_1 \setminus I$ admet un plus petit élément m_1, et comme I est un segment initial de Y_1, on a $I = \{x \in Y_1 : x < m_1\}$ (l'inclusion de droite à gauche est claire, pour l'inclusion réciproque si $x \in I$ mais $x \geqslant m_1$ alors $m_1 \in I$ car I segment initial, contradiction). Ainsi $m_1 = g(I)$. De même si on note m_2 le minimum de $Y_2 \setminus I$ alors $m_2 = g(I)$. Mais alors $m_1 = m_2 \in Y_1 \cap Y_2$ donc $I \cup \{m_1\}$ est un segment initial de Y_1 et de Y_2 contenant strictement I, contradiction.
   (b) Montrons d'abord que la réunion de g-chaînes est bien ordonnée. Si (Y_i) est une famille de g-chaînes, soit A un sous-ensemble non vide de $\bigcup_{i \in I} Y_i$. Il existe $i \in I$ tel que $A \cap Y_i$ est non vide, et alors le minimum m de $A \cap Y_i$ est un minimum de A dans $\bigcup_{i \in I} Y_i$: en effet si $y \in Y_j \cap A$,
   — soit Y_j est un segment initial de Y_i auquel cas $Y_j \subseteq Y_i$ et donc $m \leqslant y$,
   — soit Y_i est un segment initial de Y_j auquel cas comme Y_j est bien ordonné on peut comparer m et y et si $m > y$ on aurait $y \in Y_i$ (car Y_i segment initial), contradiction donc $m \leqslant y$ également.

   Soit maintenant $x \in \bigcup Y_i$, il existe i tel que $x \in Y_i$ et alors on vérifie que la question précédente implique que $\{y \in X : y < x\} \subseteq Y_i$, et donc $x = g(\{y \in X : y < x\})$ car Y_i est une g-chaîne. On en conclut que $\bigcup Y_i$ est une g-chaîne.
   (c) On a donc montré que l'ensemble des g-chaînes a un plus grand élément, notons le Y. Mais Y doit avoir un majorant strict, et alors $Y \cup \{g(Y)\}$ est également une g-chaîne, contradiction. Ainsi X doit avoir un élément maximal, ce qui conclut la preuve.

1. On dira que $A \subseteq Y_1$ est un segment initial de Y_1 si pour tout $a \in A$ et tout $y \in Y_1$, on a $y < a \Rightarrow y \in A$.

Exercice 6. Successeurs et bons ordres.

1. Soit $(E, <)$ un bon ordre et $x \in E$ un élément non maximal de E. Montrer que x a un *successeur* dans E, c'est-à-dire qu'il existe $y > x$ tel que $]x, y[= \emptyset$.
2. En déduire que tout bon ordre infini discret est isomorphe à $(\mathbb{N}, <)$.

Solution de l'exercice 6.

1. Il suffit de considérer le minimum de l'ensemble des $y \in E$ tels que $y > x$. Remarquons que comme $<$ est total, y est unique.
2. On définit une injection f de $\mathbb{N}$ dans E par récurrence en posant $f(0) = \min E$ puis $f(n+1)$ est le successeur de $f(n)$, qui existe car E est infini et par construction $\{x \in E : x \leqslant f(n)\} = \{f(0), ..., f(n)\}$ est fini.

   Montrons que f est surjective : sinon soit x le minimum du complémentaire de l'image de f. Par construction x n'est pas minimal dans E donc on peut trouver $y < x$ tel que $]y, x[= \emptyset$. Mais alors $y = f(n)$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et donc $y < f(n+1) < x$, contradiction.