TD 1 - Des ordres

Une *relation binaire* sur un ensemble X est un sous-ensemble R de $X \times X$; pour $x, y \in X$ la notation xRy signifie $(x, y) \in R$. Une relation binaire $<$ sur X définit un *ordre (partiel strict)* sur X si elle est *irréflexive* (pour tout x dans X, $\neg x < x$) et transitive (pour tous x, y, z dans X, on a l'implication $x < y$ et $y < z \Rightarrow x < z$). On dit alors que $(X, <)$ est un ensemble ordonné. Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné.

— Si deux éléments distincts de X sont toujours comparables (pour tout $x \neq y$ dans X, $x < y$ ou $y < x$), on dit que $<$ définit un *ordre total (strict)* et que $(X, <)$ est *totalement ordonnné.*
— Soit $Y \subseteq X$. Un élément $x \in X$ est un *majorant* (resp. *minorant*) de Y si pour tout y dans Y distinct de x on a $x > y$ (resp. $x < y$). Si de plus $x \in Y$ on dit que x est le maximum (resp. minimum) de Y.
— Un élément $x \in X$ est *maximal* (resp. *minimal*) s'il n'existe pas de $y \in X$ tel que $y > x$ (resp. $y < x$).
— On dit que $<$ est un *bon ordre* (ou que $(X, <)$ est bien ordonné) si toute partie non vide Y de X admet un minimum.

Soient $(E, <)$ et $(F, <)$ deux ensembles ordonnés. Une application injective $f : E \to F$ est appelé un *plongement* (d'ensembles ordonnés) si pour tous $x, y \in E$ on a $x < y$ ssi $f(x) < f(y)$. Si f est bijective, on l'appelle un *isomorphisme* (d'ensembles ordonnés).

Remarque. Si $<$ est un ordre sur X, on définit l'ordre opposé $<^{opp}$ par $x <^{opp} y$ si $y < x$. Un minimum pour $<$ devient alors un maximum pour $<^{opp}$, et inversement.
Si $<$ est un ordre sur X, on notera $x \leqslant y$ pour $x < y$ ou $x = y$.

Exercice 1. Propriétés de base.

1. Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné et soit $Y \subseteq X$. Montrer que Y possède au plus un minimum (et donc au plus un maximum), ce qui justifie le fait de parler *du* minimum (resp. maximum) de Y.
2. Montrer que dans un ensemble totalement ordonné, tout élément minimal est le minimum (et donc tout élément maximal est le maximum).
3. Donner un exemple fini d'ensemble bien ordonné. Donner un exemple infini d'ensemble bien ordonné.
4. Montrer que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

Exercice 2. Ordre sur une union disjointe.
Soient $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ des ensembles ordonnés disjoints.

1. Soit $X = E \sqcup F$, sur X, on définit la relation $<_X = <_E \cup <_F \cup E \times F$.
   Vérifier que $<_X$ définit un ordre sur X. (On appelle $(X, <_X)$ la *somme ordonnée* de $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$.) Que se passe-t-il si F est un singleton ?
2. Montrer que si E et F sont totalement ordonnés, X l'est aussi.
3. Montrer que si E et F sont bien ordonnés, X l'est aussi.

Exercice 3. Ordre produit, ordre lexicographique.
Soient $(X, <)$ et $(X', <')$ des ensembles ordonnés.

1. Montrer que la relation $\tilde{<}$ sur $X \times X'$, définie par $(x, x')\tilde{<}(y, y')$ si, et seulement si, $x < y$ et $x' <' y'$ est un ordre sur $X \times X'$. Est-ce que $\tilde{<}$ est toujours total si $<$ et $<'$ le sont ?
2. On définit l'ordre *lexicographique* sur $X \times X'$, en posant $(x, x') <_{lex} (x', y')$ ssi $x < y$ ou ($x = y$ et $x' <' y'$). Vérifier que $<_{lex}$ définit bien un ordre sur $X \times X'$.

3. Montrer que si $<$ et $<'$ sont totaux, $<_{lex}$ l'est aussi.
4. Montrer que si $<$ et $<'$ sont bons, $<_{lex}$ l'est aussi.

Exercice 4. Bestiaire d'ordres.
Dans chacun des cas suivants donner un exemple d'un ensemble X ordonné ayant la propriété demandée :

1. un ensemble totalement ordonné infini ayant à la fois un minimum et un maximum,
2. un ensemble totalement ordonné infini ayant un maximum mais pas de minimum,
3. un ensemble infini totalement ordonné *discret* (pour tout $x \in X$, si x n'est pas maximal alors il existe $y > x$ tel que $]x, y[= \emptyset$, et si x n'est pas minimal alors il existe $y < x$ tel que $]y, x[= \emptyset$, où pour $x, y \in X$ on note $]x, y[$ l'ensemble des $z \in X$ tels que $x < z < y$),
4. un ensemble infini totalement ordonné discret $(E, <)$ contenant une partie F infinie tel que la restriction de $<$ à F soit un ordre *dense* (entre deux éléments distincts de F il existe toujours un troisième élément),
5. un ensemble infini X muni d'un ordre qui n'est pas total et qui a un plus grand élément et un plus petit élément,
6. un ensemble infini X muni d'un ordre qui admet des éléments minimaux mais qui n'a pas de minimum,
7. un ensemble infini bien ordonné qui admet un maximum,
8. un exemple d'ensemble totalement ordonné mais non bien ordonné. Pouvez-vous trouver un exemple fini ?

Exercice 5. Preuve du lemme de Zorn.
On se propose de prouver le lemme de Zorn à partir de l'axiome du choix. On va montrer une version plus forte du lemme de Zorn que voici.
Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné admet un majorant. Alors X admet un élément maximal.

1. Vérifier que l'énoncé ci-dessus implique le lemme de Zorn usuel.
2. On va raisonner par l'absurde : prenons $(X, <)$ ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné admet un majorant, et supposons que X n'admette pas d'élément maximal. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-ensembles bien ordonnés de X. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathcal{C} \to X$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $g(Y)$ est un majorant strict de Y.
3. On fixe une fonction $g : \mathcal{C} \to X$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $g(Y)$ est un majorant strict de Y. Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ bien ordonné est appelé une g-chaîne si pour tout $y \in Y$, on a $y = g(\{x \in Y : x < y\})$.
   (a) Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux g-chaînes, alors Y_1 est un segment initial[1] de Y_2 ou Y_2 est un segment initial de Y_1. On pourra considérer la réunion des parties qui sont à la fois des segments initiaux de Y_1 et de Y_2.
   (b) Montrer que la réunion des g-chaînes est une g-chaîne.
   (c) Conclure.

Exercice 6. Successeurs et bons ordres.

1. Soit $(E, <)$ un bon ordre et $x \in E$ un élément non maximal de E. Montrer que x a un *successeur* dans E, c'est-à-dire qu'il existe $y > x$ tel que $]x, y[= \emptyset$.
2. En déduire que tout bon ordre infini discret est isomorphe à $(\mathbb{N}, <)$.

1. On dira que $A \subseteq Y_1$ est un segment initial de Y_1 si pour tout $a \in A$ et tout $y \in Y_1$, on a $y < a \Rightarrow y \in A$.