TD 2 - Cardinalité, axiome du choix

Exercice 1. Des ensembles de suites entières.
On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}\; n \geqslant m \Rightarrow f(n) = 0\} \\ S_2^M &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\, f(n) < M\} \qquad \text{où } M \in \mathbb{N} \\ S_3^M &= S_1 \cap S_2^M \end{aligned}$$

1. Décrire ce que représentent les ensembles ci-dessus.
2. Ces ensembles sont-ils finis ? dénombrables ? non dénombrables ?

Exercice 2. Bons ordres plongeables dans $\mathbb{R}$.
Si $(E,<)$ et $(F,<)$ sont deux ensembles totalement ordonnés, une application $f : E \to F$ est appelé un *plongement* (d'ensembles totalement ordonnés) si pour tous $x, y \in E$ avec $x < y$ on a $f(x) < f(y)$. (Noter que f est automatiquement injective.) On écrit alors $f : (E,<) \hookrightarrow (F,<)$.

1. Montrer que tout ordre total dénombrable se plonge dans $(\mathbb{Q},<)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R},<)$?

Exercice 3. Quelques conséquences de l'axiome du choix.
Dans cet exercice, on admet l'axiome du choix.

1. Rappeler pourquoi tout espace vectoriel admet une base.
2. Montrer que tout groupe non-abélien G contient un sous-groupe maximal abélien (c'est-à-dire un sous-groupe abélien A qui n'est contenu strictement dans aucun sous-groupe abélien de G).
3. Montrer que si G est un groupe finiment engendré alors tout sous-groupe propre de G est contenu dans un sous-groupe propre maximal de G.
4. Soit R un anneau commutatif unitaire et $I \subseteq R$ un idéal (propre) de R. Montrer que I est contenu dans un idéal maximal (propre) de R.

Exercice 4. Cardinalité des K-espaces vectoriels et isomorphisme.
On admet l'axiome du choix.

1. Montrer que si X est infini, alors l'ensemble des parties finies de X a la même cardinalité que X.
2. Soit K un corps et X un ensemble infini. Déduire de la question précédente le cardinal de l'espace vectoriel $K^{\bigoplus X}$ des fonctions $f : X \to K$ telles qu'il existe $F \subseteq X$ fini vérifiant pour tout $x \notin F$, $f(x) = 0$.
3. Montrer que si K est un corps dénombrable, deux K-espaces vectoriels de dimension infinie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même cardinalité.

Exercice 5. Calculs de cardinalité.

1. Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Montrer que $\mathcal{S} \approx \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \approx \overline{2}^{\mathbb{R}}$.
3. Déterminer le cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, puis de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.
4. Soit $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.
5. (Plus difficile.) Soit $\mathrm{Mon}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Mon}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$. [*Indication* : Montrer d'abord que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, alors l'ensemble $\{a \in \mathbb{R} \mid \sup_{x<a} f(x) < \inf_{x>a} f(x)\}$ est dénombrable ou fini.]